

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELAGEM DINÂMICA POR ELEMENTOS FINITOS E CONTROLE DE PLACAS E  
VIGAS USANDO SANDUÍCHES DE SENSOR-ATUADOR PIEZELÉTRICOS**

**Dissertação submetida à**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**para a obtenção do grau de**

**MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**MARCUS VINÍCIUS DE ALMEIDA MARINHO**

**Florianópolis, Julho de 2008**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELAGEM DINÂMICA POR ELEMENTOS FINITOS E CONTROLE DE PLACAS E  
VIGAS USANDO SANDUICHES DE SENSOR-ATUADOR PIEZELÉTRICOS**

**MARCUS VINÍCIUS DE ALMEIDA MARINHO**

**Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de**

**MESTRE EM ENGENHARIA**

**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA**

**sendo aprovada em sua forma final.**

---

**Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D. – Orientador**

---

**Prof. Marcelo Kranjc Alves, Ph.D. – Co-orientador**

---

**Eduardo Alberto Fancello, D.Sc. – Coordenador do curso**

**BANCA EXAMINADORA**

---

**Prof. Roberto Jordan, Dr. Eng. - Presidente**

---

**Prof. José Carlos Pereira, Dr.**

---

**Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr.**



**“O conhecimento torna a alma jovem e  
diminui a amargura da velhice.”**

**Leonardo da Vinci**



**Aos meus pais, por todo apoio e carinho.**





## **AGRADECIMENTOS**

Muitas são as pessoas a quem gostaria de agradecer. Primeiro quero expressar minha gratidão ao Prof. Arcanjo Lenzi, orientador e guia do meu trabalho, chefe do Grupo de Tecnologia em Vibrações e Acústica.

Agradeço também aos meus colegas de trabalho, pelo grande apoio, ajuda e discussões que solucionaram muitas das minhas dúvidas. Aos amigos dos grupos de trabalho: LVA, GMAC, e GRANTE. Ao Gabriel Paim, bolsista de iniciação científica em controle e automação, pelo seu excelente trabalho, suporte e dedicação. Agradecimentos a André Trintini, mestrando em controle e automação, que veio compor nosso grupo de estudos trazendo grandes contribuições. Ao Guillaume Barrault, precursor do tema no grupo de pesquisa, pela ajuda e orientação no projeto do trabalho. Agradecimentos a Andrea Fortes pela compreensão, apoio e dedicação nas minhas longas horas de trabalho.

À Universidade Federal de Santa Catarina pelo ambiente aberto a pesquisa e diversidade. À Embraco e FINEP pela parceria e suporte financeiro que nos permite ter um laboratório com excelência tecnológica. Ao CNPq pela bolsa de estudos, promovendo incentivo à pesquisa nacional.



## SUMÁRIO

|  |       |
|--|-------|
| Lista de figuras.....  | xiv   |
| Lista de tabelas.....  | xviii |
| Simbologia .....   | xix   |
| Resumo.....  | xxv   |
| Abstract.....  | xxvi  |
| 1. Introdução .....  | 1     |
| 2. Revisão Bibliográfica .....   | 5     |
| 2.1 História da Piezeletricidade .....                                   | 5     |
| 2.2 Método dos Elementos Finitos e Piezeletricidade .....                | 8     |
| 2.3 Fenômeno da Piezeletricidade .....                                   | 13    |
| 2.3.1 Efeito da Piezeletricidade .....                                   | 13    |
| 2.3.2 Polarização Elétrica .....   | 14    |
| 2.3.3 Cristalografia de Materiais Piezelétricos.....                     | 18    |
| 2.4 Materiais Piezelétricos .....  | 19    |
| 2.4.1 Cerâmicas Piezelétricas .....                                      | 20    |
| 2.5 Transdutores Piezelétricos .....                                     | 22    |
| 2.5.1 Modos de Atuação de Cerâmicas Piezelétricas .....                  | 23    |
| 2.5.2 Sensor.....  | 25    |
| 2.5.3 Atuador .....  | 29    |
| 3. Modelagem Matemática em Mecânica dos Sólidos e Piezeletricidade ..... | 35    |
| 3.1 Equações Cinemáticas .....   | 35    |
| 3.1.1 Elasticidade 3D .....  | 35    |
| 3.1.2 Placa 2D: Hipótese Cinemática de <i>Reissner-Mindlin</i> .....     | 39    |
| 3.1.3 Eletrostática 3D.....  | 42    |
| 3.1.4 Placa 2D: Hipótese de Campo e Potencial Elétrico.....              | 43    |
| 3.2 Relações Constitutivas .....   | 45    |
| 3.2.1 Piezeletricidade 3D .....  | 45    |
| 3.2.2 Placa 2D: Lâmina Piezelétricas .....                               | 49    |
| 3.2.3 Placa Sanduíche: Carregamento Generalizado.....                    | 51    |
| 3.2.4 Placa Sanduíche: Equação Constitutiva Generalizada .....           | 53    |
| 3.2.5 Discretização para Sensor e Atuador .....                          | 57    |
| 3.3 Equação de Equilíbrio Dinâmica Eletro-Mecânica .....                 | 60    |
| 3.3.1 Equações da Eletrostática .....                                    | 60    |
| 3.3.2 Conservação do Momento Linear.....                                 | 61    |

|   |     |
|---|-----|
| 3.3.3 Formulação Forte .....  | 61  |
| 3.4 Princípio Variacional.....  | 62  |
| 3.4.1 Formulação Fraca .....  | 65  |
| 3.4.2 Resolução da Formulação Fraca para Placa Sanduíche .....          | 65  |
| 3.5 Método dos Elementos Finitos para o Problema Acoplado .....         | 74  |
| 3.5.1 Elemento Isoparamétrico .....                                     | 75  |
| 3.5.2 Variáveis de Campo Mecânico em Coordenadas Paramétricas .....     | 79  |
| 3.5.3 Variáveis de Campo Elétrico em Coordenadas Paramétricas .....     | 80  |
| 3.5.4 Determinação das Matrizes de Equilíbrio Elementares .....         | 81  |
| 3.5.5 Montagem do Sistema Global .....                                  | 88  |
| 4. Solução Dinâmica do Problema Acoplado .....                          | 91  |
| 4.1 Análise modal.....  | 91  |
| 4.1.1 Condição de Contorno Elétrica .....                               | 92  |
| 4.1.2 Análise Modal para o Sistema em Circuito Aberto.....              | 93  |
| 4.1.3 Análise Modal para o Sistema em Circuito Fechado .....            | 95  |
| 4.1.4 Equação Dinâmica para Circuito Fechado em Coordenadas Modais..... | 96  |
| 4.2 Considerações sobre Amortecimento .....                             | 98  |
| 4.3 Solução Harmônica .....   | 99  |
| 5. Controle Ativo de Vibrações.....                                     | 101 |
| 5.1 Representação por Espaço de Estados.....                            | 102 |
| 5.2 Sistema de Controle e a Estratégia <i>Feedback</i> .....            | 104 |
| 5.3 Técnica de Controle Ótimo.....                                      | 106 |
| 5.4 Técnica de Controle Modal .....                                     | 108 |
| 6. Resultados Obtidos .....   | 109 |
| 6.1 Validação Estática.....   | 109 |
| 6.1.1 Teste para Placa Isotrópica Pura .....                            | 109 |
| 6.1.2 Teste do Bimorfo Piezelétrico .....                               | 112 |
| 6.1.3 Viga Espessa Coberta com Piezelétricos .....                      | 115 |
| 6.1.4 Placa Fina com Pastilhas Piezelétricas.....                       | 117 |
| 6.2 Análise Modal.....  | 121 |
| 6.2.1 Viga Espessa Coberta com Piezelétricos .....                      | 121 |
| 6.2.2 Placa Fina com Pastilhas Piezelétricas.....                       | 124 |
| 6.3 Análise da Resposta Dinâmica do Sistema Com e Sem Controle.....     | 128 |
| 6.3.1 Viga Espessa Coberta com Piezelétricos .....                      | 128 |
| 6.3.2 Placa Fina com Pastilhas Piezelétricas.....                       | 139 |
| 7. Considerações Finais.....  | 145 |
| 7.1 Propostas para Futuros Trabalhos.....                               | 146 |

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| Referências Bibliográficas .....  | 147 |
| A. Integração Numérica .....      | 151 |
| B. Autovalores e Autovetores..... | 155 |

## LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 2.1: Efeitos, direto e inverso, da piezeletricidade. ....   | 13 |
| Figura 2.2: Aplicações do efeito piezelétrico.....   | 14 |
| Figura 2.3: Campo elétrico entre placas paralelas de um capacitor (a) sem<br>dielétrico e (b) com dielétrico.....  | 15 |
| Figura 2.4: Distribuição de cargas em um capacitor de placas paralelas com<br>dielétrico. ....   | 16 |
| Figura 2.5: Domínios de dipolos elétricos em grãos de cerâmicas ferroelétricas (a)<br>antes da polarização e, (b) após a polarização.....  | 20 |
| Figura 2.6: Unidade cristalina do PZT (a) Cúbico centrado acima de $T_c$ e, (b)<br>Tetragonal não simétrico após a aplicação de um campo elétrico e<br>temperatura abaixo de $T_c$ ..... | 21 |
| Figura 2.7: Sistema de coordenadas local do elemento piezelétrico.....   | 23 |
| Figura 2.8: Modo de atuação transversal. Configuração laminar. ....  | 24 |
| Figura 2.9: Modo de atuação paralelo. Configuração em pilha. ....  | 24 |
| Figura 2.10: Modo de atuação cisalhante. Configuração cisalhante. ....   | 25 |
| Figura 2.11: Modelo elétrico do sensor piezelétrico (a) como fonte de tensão, (b)<br>como fonte de carga.....  | 26 |
| Figura 2.12: Curva de descarga típica para um sensor piezelétrico.....   | 27 |
| Figura 2.13: Gráfico de desempenho para um atuador piezelétrico. ....  | 30 |
| Figura 2.14: Deflexão da viga sob uma força. Detalhe do atuador piezelétrico.....  | 31 |
| Figura 2.15: Gráfico de momento para uma viga sob uma carga transversal. ....  | 32 |
| Figura 2.16: Diagrama de esforços na seção de corte do atuador piezelétrico.....   | 32 |
| Figura 3.1: Deformação de um ponto no domínio de um corpo arbitrário.....  | 35 |
| Figura 3.2: Deformação de uma fibra definida por $\overline{PQ}$ no domínio de um corpo<br>arbitrário. ....  | 36 |
| Figura 3.3: Domínio estrutural de uma placa. ....  | 39 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 3.4: Hipótese cinemática de Reissner-Mindlin para uma placa deformada....  | 40  |
| Figura 3.5: Trabalho de um campo elétrico sobre uma carga de prova. ....  | 42  |
| Figura 3.6: Distribuição do potencial elétrico em uma lâmina de piezelétrico. ....  | 44  |
| Figura 3.7: Placa sanduíche de piezelétrico. ....   | 51  |
| Figura 3.8: Diagrama de flexão da placa sanduíche (a) tensões descontínuas e (b) deformações contínuas. ....  | 52  |
| Figura 3.9: Diagrama de carregamentos generalizados em um laminado sanduíche. ....  | 53  |
| Figura 3.10: Sanduíche piezelétrico com os circuitos elétricos para atuador e sensor. ....  | 58  |
| Figura 3.11: Polarização e campo elétrico em um corpo piezelétrico. ....  | 60  |
| Figura 3.12: Contorno da placa dividido em duas regiões $S_i$ e $A_i$ . ....  | 70  |
| Figura 3.13: Vetores diretores para tração prescrita no contorno da placa. ....   | 70  |
| Figura 3.14: Discretização de um corpo em elementos finitos. ....   | 74  |
| Figura 3.15: Elemento da placa sanduíche piezelétrica e os graus de liberdade envolvidos. ....  | 75  |
| Figura 3.16: Elemento de Lagrange biquadrático de 9 nós definido em coordenadas naturais. ....  | 76  |
| Figura 3.17: (a) Elemento plano Q9 distorcido no espaço de coordenada físico. (b) O mesmo elemento parametrizado no espaço de coordenadas naturais $\xi\eta$ . .... | 76  |
| Figura 5.1: Diagrama de bloco do sistema em espaço de estados. ....   | 102 |
| Figura 5.2: Diagrama de bloco do sistema em espaço de estados. ....   | 103 |
| Figura 5.3. Sistema de controle em uma viga engastada. ....   | 105 |
| Figura 5.4: Diagrama de blocos de um sistema de controle realimentado. ....   | 105 |
| Figura 6.1: Placa Isotrópica simplesmente apoiada sob ação de uma força concentrada. ....   | 110 |
| Figura 6.2: Malha de $\frac{1}{4}$ da placa com elementos distorcidos. ....   | 111 |
| Figura 6.3: Viga bimorfo de PVDF. ....  | 112 |
| Figura 6.4: Deflexão estática do bimorfo sujeito a um potencial elétrico de 1 Volt..  | 113 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 6.5: Distribuição do potencial elétrico para o bimorfo com cinco pares de eletrodos .....  | 114 |
| Figura 6.6: Distribuição do potencial elétrico no bimorfo para um e cinco pares de eletrodos. ....  | 114 |
| Figura 6.7: Viga sanduíche contendo piezelétricos nas superfícies superior e inferior.....  | 115 |
| Figura 6.8: Deflexão da viga sanduíche para um potencial elétrico aplicado. ....  | 116 |
| Figura 6.9: Placa de Abreu (2003) com três pastilhas piezelétricos. ....  | 117 |
| Figura 6.10: Deflexão estática para potencial elétrico aplicado (336 elementos)....   | 118 |
| Figura 6.11: Resultados da deflexão do presente modelo (336 elementos) com o modelo do Ansys (750 elementos). (a) corte longitudinal em $y=300\text{mm}$ e (b) corte transversal em $x=300\text{mm}$ . ....   | 119 |
| Figura 6.12: Resultados da deflexão do presente modelo (336 elementos) com o modelo do Ansys (3.000 elementos). (a) corte longitudinal em $y=300\text{mm}$ e (b) corte transversal em $x=300\text{mm}$ . .... | 120 |
| Figura 6.13: Modos de flexão para viga sem piezelétricos, usando 20 elementos..   | 122 |
| Figura 6.14: Viga sanduíche com eletrodos distribuídos. Chave fechada curto-circuita os piezelétricos. ....   | 123 |
| Figura 6.15: Efeito do enrijecimento da viga devido ao acoplamento piezelétrico. O fechamento do circuito ocorre do engaste para ponta livre.....   | 123 |
| Figura 6.16: Efeito do enrijecimento da viga devido ao acoplamento piezelétrico. O fechamento do circuito ocorre da ponta livre para o engaste.....   | 124 |
| Figura 6.17: Malhas para a placa de Abreu (a) $8 \times 12$ (b) $16 \times 24$ elementos. Os três pares de atuador/sensor estão pintados na cor azul em linhas espessas. ....                                 | 125 |
| Figura 6.18: Modos de vibração para placa com três pares de transdutores. ....  | 127 |
| Figura 6.19: Vigas de teste. (a) Coberta com um par de atuador/sensor; (b) coberta com uma pastilha de atuador/sensor próximo ao engaste; (c) viga com cinco pastilhas de atuador/sensor distribuídas. ....   | 128 |
| Figura 6.20: Resposta no tempo para viga totalmente coberta por um único par de piezelétricos.....  | 130 |



|  |     |
|--|-----|
| Figura 6.21: Resposta no tempo para viga com um único par de pastilhas piezelétricas próximo ao engaste.....   | 131 |
| Figura 6.22: Resposta no tempo para viga com cinco pares de pastilhas piezelétricas cobrindo toda viga. ....   | 132 |
| Figura 6.23: Resposta em frequência para viga totalmente coberta por um único par de piezelétricos. ....   | 133 |
| Figura 6.24: Resposta em frequência para viga com um único par de pastilhas piezelétricas próximo ao engaste.....  | 134 |
| Figura 6.25: Resposta em frequência para viga com cinco pares de pastilhas piezelétricas cobrindo toda viga. ....  | 134 |
| Figura 6.26: Perturbação de ruído branco. Resposta no tempo com atuadores limitados a 100V.....  | 136 |
| Figura 6.27: Perturbação de ruído branco. Resposta no tempo com atuadores limitados a Limitado a 150 Volts.....  | 137 |
| Figura 6.28: Perturbação de ruído branco. Resposta no tempo com atuadores limitados a Limitado a 100 Volts e alteração dos parâmetros do controlador. .... | 138 |
| Figura 6.29: Resposta em frequência da viga devido a alteração dos parâmetros do controlador. ....   | 139 |
| Figura 6.30: Placa fina de Abreu (2003) com os três pares de atuador/sensor, (1), (2) e (3); e o local da perturbação mecânica, $F(t)$ . ....              | 140 |
| Figura 6.31: Resposta no domínio do tempo para um perturbação harmônica na placa fina com três pares de atuador/sensor. ....                               | 141 |
| Figura 6.32: Resposta em frequência para a placa fina com três pares de atuador/sensor. ....   | 142 |
| Figura 6.33: Placa fina sujeita a um ruído branco. ....  | 143 |

## LISTA DE TABELAS

|   |     |
|---|-----|
| Tabela 1 - Exemplos de materiais piezelétricos classificados por grupo de material. ....  | 19  |
| Tabela 2 – Comparativo de algumas propriedades para diferentes materiais piezelétricos. ....  | 22  |
| Tabela 3 – Resistência elétrica para alguns sistemas de medição. ....   | 29  |
| Tabela 4 – Relação de entradas e saídas para cada tipo de circuito. ....  | 92  |
| Tabela 5 – Dados para placa isotrópica da Figura 6.1. ....  | 110 |
| Tabela 6 – Comparação de resultados de deflexão máxima (em polegadas) para a placa simplesmente apoiada submetida a uma força concentrada. .... | 110 |
| Tabela 7 – Comparação dos resultados de deflexão para uma malha distorcida. ..  | 111 |
| Tabela 8 – Propriedades do PVDF Kynar. ....   | 112 |
| Tabela 9 – Comparação do deslocamento $w$ do biformo piezelétrico em função do comprimento. ....  | 113 |
| Tabela 10– Distribuição do potencial elétrico (em Volts) no biformo. ....   | 115 |
| Tabela 11 – Propriedades de material para o PZT-5H. ....  | 116 |
| Tabela 12 – Comparação do deslocamento máximo da ponta da viga sanduíche para um potencial elétrico de 10 V aplicado em cada lâmina. ....       | 116 |
| Tabela 13 – Posicionamento dos pares Sensor/Atuador na placa. ....  | 117 |
| Tabela 14 – Propriedade para o atuador PZT (Abreu). ....  | 118 |
| Tabela 15 – Comparação do potencial elétrico (V) nos sensores da placa de Abreu. ....   | 120 |
| Tabela 16 – Convergência da frequência de vibração para viga em flexão. ....  | 121 |
| Tabela 17 – Alteração das frequências naturais da viga devido ao sanduíche piezelétrico. ....   | 122 |
| Tabela 18 – Alterações das frequências naturais da placa devidas as pastilhas piezelétricas. ....   | 125 |

## SIMBOLOGIA

### Funções e Operadores:

| Símbolo               | Significado  |
|-----------------------|--|
| $\nabla(\bullet)$     | Gradiente  |
| $\nabla_x(\bullet)$   | Gradiente em termos da variável material               |
| $d(\bullet)$          | Derivada total   |
| $\text{div}(\bullet)$ | Divergente.  |
| $\partial(\bullet)$   | Derivada parcial                                       |
| $F$                   | Função gradiente de deformação lagrangiano             |
| $x(\bullet)$          | Descrição lagrangiana, ou material, da função posição. |
| $\cdot$               | Produto escalar.                                       |
| $\times$              | Produto vetorial.                                      |
| $\otimes$             | Produto tensorial.                                     |

### Alfabeto Romano

| Símbolo              | Significado  |
|----------------------|--|
| $\mathbf{A}$         | Matriz de estado.                                  |
| $[\hat{\mathbf{A}}]$ | Matriz de rigidez em membrana do laminado.         |
| $\mathbf{B}$         | Matriz de estado.                                  |
| $[\hat{\mathbf{B}}]$ | Matriz de acoplamento membrana-flexão do laminado. |
| $[\mathbb{B}]$       | Matriz de interpolação das deformações.            |
| $[\hat{c}]$          | Tensor de elasticidade mecânica corrigido.         |
| $[c]$                | Tensor de elasticidade mecânica.                   |
| $C$                  | Capacitância.                                      |
| $\mathbf{C}$         | Matriz de estado.                                  |
| $[C]$                | Matriz de amortecimento                            |
| $[\bar{C}]$          | Matriz de elasticidade corrigida.                  |
| $[d]$                | Matriz de constantes piezelétricas.                |
| $\vec{D}$            | Vetor de deslocamento elétrico de cargas.          |
| $\vec{D}_g$          | Vetor de deformações mecânicas generalizadas.      |

|                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| <b>D</b>                              | Matriz de estado.   |
| $[\hat{\mathbf{D}}]$                  | Matriz de rigidez em flexão do laminado.                                |
| $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ | Base ortogonal no sistema local.  |
| $[e]$                                 | Matriz de constantes piezelétricas.                                     |
| $[\bar{e}]$                           | Matriz de constantes piezelétricas corrigidas.                          |
| $E_0$                                 | Campo elétrico inicial entre placas paralelas.                          |
| $\vec{E}$                             | Vetor de campo elétrico.  |
| <b>E</b>                              | Tensor de Green-Lagrange  |
| $\vec{F}$                             | Vetor de forças.  |
| $[\hat{\mathbf{F}}]$                  | Matriz de rigidez em cisalhamento transversal do laminado.              |
| $\vec{g}$                             | Vetor de gravidade.   |
| $[g]$                                 | Matriz de constantes piezelétricas.                                     |
| <b>G</b>                              | Função de transferência do sistema.                                     |
| $[\hat{\mathbf{G}}]$                  | Matriz de rigidez piezelétrica em membrana do laminado.                 |
| $h$                                   | Espessura da placa estrutural.  |
| $h_{pzt}$                             | Espessura da placa de piezelétrico.                                     |
| $h_s$                                 | Espessura do laminado sanduíche.  |
| $h_{k,1}$                             | Espessura de uma lâmina.  |
| $h_{k,2}$                             | Momento estático de uma lâmina  |
| $h_{k,3}$                             | Momento de inércia de uma lâmina  |
| $[h]$                                 | Matriz de constantes piezelétricas.                                     |
| $H$                                   | Entalpia.   |
| <b>H</b>                              | Função de transferência do controle.                                    |
| $[\hat{\mathbf{H}}]$                  | Matriz de rigidez piezelétrica em flexão do laminado.                   |
| $I$                                   | Corrente elétrica.  |
| $I_1$                                 | Massa linear de uma lâmina  |
| $I_2$                                 | Momento estático de massa linear de uma lâmina.                         |
| $I_3$                                 | Momento de inércia de massa linear de uma lâmina.                       |
| <b>I</b>                              | Matriz identidade.  |
| $[\mathbf{I}_m]$                      | Matriz com propriedades de massa $I_1, I_2, I_3$ .                      |
| $[\hat{\mathbf{I}}]$                  | Matriz de rigidez piezelétrica em cisalhamento transversal do laminado. |
| $J_{LQR}$                             | Função de custo.  |
| $[\mathbf{J}]$                        | Matriz Jacobiano.   |
| $[\hat{\mathbf{J}}]$                  | Matriz de permissividade piezelétrica do laminado.                      |

|                           |  |
|---------------------------|--|
| $\mathbf{K}$              | Matriz de ganho de realimentação.                  |
| $[K_{uu}]$                | Matriz de rigidez mecânica global.                 |
| $[K_{\phi u}]$            | Matriz de acoplamento eletro-mecânico global.      |
| $[K_{u\phi}]$             | Matriz de acoplamento mecânico-elétrico global.    |
| $[K_{\phi\phi}]$          | Matriz dielétrica global.                          |
| $[\mathbb{K}_{uu}]$       | Matriz de rigidez mecânica elementar.              |
| $[\mathbb{K}_{\phi u}]$   | Matriz de acoplamento eletro-mecânico elementar.   |
| $[\mathbb{K}_{u\phi}]$    | Matriz de acoplamento mecânico-elétrico elementar. |
| $[\mathbb{K}_{\phi\phi}]$ | Matriz dielétrica elementar.                       |
| $L$                       | Comprimento.                                       |
| $\mathcal{L}$             | Lagrangiano  |
| $\vec{M}$                 | Momento fletor.                                    |
| $[M]$                     | Matriz de massa global.                            |
| $[\mathbb{M}]$            | Matriz de massa elementar.                         |
| $\vec{N}$                 | Forças normais.                                    |
| $N_i$                     | Função de interpolação de Lagrange.                |
| $[\mathbf{N}]$            | Matriz de interpolação.                            |
| $P$                       | Polarização elétrica.                              |
| $\mathbf{P}$              | Solução de Riccati.                                |
| $q_0$                     | Carga elétrica pontual.                            |
| $q_u$                     | Vetor de deslocamentos mecânicos nodais.           |
| $q_\phi$                  | Vetor de potenciais elétricos elementares.         |
| $Q$                       | Cargas elétricas.                                  |
| $Q_{ii}$                  | Coefficientes de ponderação do LQR.                |
| $Q_1$                     | Cargas elétricas livres em um capacitor.           |
| $Q_2$                     | Cargas elétricas ligadas em um capacitor.          |
| $\vec{Q}$                 | Vetor de Forças cortantes.                         |
| $\mathbf{Q}$              | Matriz de ponderação do LQR.                       |
| $\vec{r}$                 | Posição de uma partícula.                          |
| $R$                       | Resistência elétrica.                              |
| $R_{ii}$                  | Coefficientes de ponderação do LQR.                |
| $\vec{R}$                 | Vetor de carregamento modal.                       |
| $\mathbf{R}$              | Matriz de ponderação do LQR.                       |
| $[s]$                     | Tensor de rigidez mecânica.                        |
| $t$                       | Tempo.   |

|                        |   |
|------------------------|---|
| $t_0$                  | Constante de tempo inicial.   |
| $\vec{t}$              | Vetor de tração prescrita.  |
| $[T]$                  | Matriz de transformação.  |
| $\vec{u}$              | Deslocamento de uma partícula.                                      |
| $\{u, v, w\}$          | Componentes do deslocamento $\vec{u}$ .                             |
| $U$                    | Vetor de deslocamentos global                                       |
| $\mathcal{U}$          | Energia potencial.  |
| $W_c$                  | Trabalho de forças conservativas.                                   |
| $\vec{x}$              | Posição de uma partícula na configuração atual $\Omega_t$ .         |
| $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ | Vetores de estado.  |
| $\vec{X}$              | Posição de uma partícula na configuração de referência $\Omega_0$ . |
| $\{x, y, z\}$          | Componentes ortogonais do vetor de deslocamento $\vec{X}$ .         |
| $Z$                    | Impedância elétrica.  |

### Alfabeto Grego

| Símbolo               | Significado                                    |
|-----------------------|--|
| $\alpha$              | Coeficiente de correção da energia cisalhante. |
| $\alpha, \beta$       | Coeficientes de amortecimento de Rayleigh.     |
| $[\beta]$             | Matriz de constantes piezelétricas             |
| $\vec{\varepsilon}$   | Vetor de deformações.                          |
| $\vec{\varepsilon}_0$ | Vetor de deformações de membrana.              |
| $\vec{\varepsilon}_f$ | Vetor de deformações de flexão.                |
| $\vec{\varepsilon}_g$ | Vetor de deformações generalizadas.            |
| $[\varepsilon]$       | Tensor de deformação de Green.                 |
| $\epsilon$            | Permissividade absoluta.                       |
| $\epsilon_0$          | Permissividade do vácuo.                       |
| $[\epsilon]$          | Matriz de permissividade dielétrica.           |
| $\phi$                | Potencial elétrico.                            |
| $\phi_o$              | Potencial elétrico na superfície elementar.    |
| $\gamma$              | Componente de cisalhamento.                    |
| $\vec{\gamma}_c$      | Deformação de cisalhamento transversal.        |
| $\eta, \xi$           | Coordenadas paramétricas                       |
| $\Phi$                | Matriz de autovetor                            |
| $\kappa$              | Permissividade elétrica relativa.              |

|                      |  |
|----------------------|--|
| $\vec{\kappa}$       | Vetor de deformação de flexão.                     |
| $\lambda$            | Autovalor  |
| $\nu$                | Constante de Poisson.                              |
| $\theta_x, \theta_y$ | Rotações devido à flexão.                          |
| $\rho$               | Densidade de material.                             |
| $\varrho$            | Densidade superficial de cargas elétricas.         |
| $[\sigma]$           | Tensor de tensões mecânicas.                       |
| $\tau$               | Tensão de cisalhamento.                            |
| $\psi_0$             | Ângulo de fase para solução de vibração homogênea. |
| $\psi_1$             | Ângulo de fase para solução de vibração forçada.   |
| $\omega$             | Frequência.  |
| $\omega_n$           | Frequência natural.                                |
| $\Omega_0$           | Configuração no domínio de referência.             |
| $\Omega_t$           | Configuração no domínio atual.                     |
| $\vec{\xi}$          | Vetor de deslocamentos modais.                     |
| $\zeta$              | Razão de amortecimento modal                       |





## RESUMO

O presente trabalho investiga o uso de material piezelétrico acoplado a estruturas inertes como método de controle ativo de vibrações. Uma revisão em piezeletricidade, incluindo assuntos de elétrica, eletrostática, aspectos materiais e equipamentos externos de atuação e sensoriamento são realizados. Esta revisão possibilita uma melhor compreensão física do problema visando o lado prático experimental e auxiliando na interpretação matemática da modelagem. É realizada também uma revisão bibliográfica específica em trabalhos de piezeletricidade que utilizam o método dos elementos finitos para modelagem de estruturas com piezelétricos. O modelo dinâmico para placas com piezelétricos colados na superfície são obtidas na forma fraca do problema. A Teoria de Deformações Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT) é usada na formulação e as propriedades do modelo são obtidas pela teoria de laminado em Camada Equivalente Única (ESL). O modelo obtido na forma fraca é discretizado pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) utilizando funções de Lagrange para um elemento plano biquadrático de nove nós. A partir do modelo discreto é iniciado o estudo em análise modal preparando o caminho para o controle do sistema. Duas formas de se ver o problema modal são abordadas, sistemas conectados a um circuito fechado e sistemas piezelétricos em circuito aberto. Mostra-se, de uma forma ainda não vista, que as constantes piezelétricas não afetam as frequências naturais obtidas pela análise modal para um sistema conectado em circuito fechado. Por fim, foi aplicado um controle LQR para averiguar as potencialidades das formulações desenvolvidas na atenuação das vibrações. Resultados promissores foram encontrados. Testes de controle são realizados e os resultados apresentados para uma viga espessa com varias configurações de piezelétrico e para uma placa fina com três pastilhas piezelétricas distribuídas.

Palavras chave: Piezeletricidade; Método dos Elementos Finitos; Análise Modal; Controle Ativo de Vibração.

## ABSTRACT

The present work investigates the use of piezoelectric material attached to an inert structure as a method of active vibration control. A review in piezoelectricity including aspects of electric, electrostatic, material constitutive properties and external equipment for sensing and actuation is done. This review enhances a better physical understanding of the problem, focusing on the practice experimental side and helping on the mathematical modeling interpretation. Also it is done a specific bibliography review on piezoelectric works which uses finite element methods to model structures with piezoelectric patches attached. The dynamic model for plates with surface bonded piezoelectric is derived in its weak form. The First-order Shear Deformation Theory (FSDT) and the Equivalent Single Layer (ESL) are used in the formulation as displacement and material hypothesis, respectively. Discretization of the weak form is further active by Finite Element Method (FEM) using Lagrange functions for a bi-quadratics nine nodes element. From the discrete model a Modal Analysis study is initiated as a preparation for an upcoming control system. Two approaches for the modal problem are observed: systems connected to closed circuit and systems in open circuit. It is shown, in a way not seen before, that the piezoelectric constants do not affect natural frequencies when the system is connected in closed circuit. In the end, LQR control is applied to verify the potentials of vibrations suppression using the developed formulation. Promising results are founding. Tests for the control are realized and the results presented for a thick beam with various piezoelectric configuration and for a thin plate with three piezoelectric patches distributed.

Key Words: Piezoelectricity; Finite Element Method; Modal Analysis; Active Vibration Control.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Vibração mecânica é um importante foco de estudo na engenharia, seja por questões relativas à própria integridade física do sistema ou devido ao desconforto proporcionado aos usuários dos equipamentos e das estruturas. O desempenho de um sistema com relação ao nível de vibração aceitável pode ser obtido por diferentes métodos. Um desses métodos consiste em isolar a fonte de vibração do sistema de interesse, o projeto de isoladores visa minimizar a transmissão do movimento de vibração da fonte para o sistema de interesse. O outro método consiste no projeto de absorvedores de vibração que, diferentemente dos isoladores, tentam reduzir a vibração da fonte absorvendo parte da energia do movimento. Tradicionalmente, estes projetos visam alterar parâmetros de massa, rigidez e amortecimento, técnica conhecida como controle passivo de vibrações.

Com algumas exceções, o projeto em vibrações mecânicas via controle passivo é eventualmente comprometido e/ou limitado por razões geométricas, parâmetros de resistência dos materiais, ou outros fatores que possam interferir no funcionamento e na estabilidade do sistema. Neste âmbito, sistemas de controle ativo tornam-se uma alternativa de projeto. Um sistema de controle ativo possui quatro elementos principais: o controlador, o atuador, o sensor e a estrutura. O sensor é usado para monitorar a estrutura fornecendo sinais medidos para o controlador. O controlador, por sua vez, possui leis de controle baseadas no sistema da estrutura, tendo por finalidade determinar um sinal capaz de atenuar as vibrações indesejadas. O atuador é o dispositivo que recebe o sinal do controlador e é responsável em converter este sinal em energia a ser imposta na estrutura a ser controlada.

Neste contexto os piezelétricos apresentam-se como materiais ideais para construção de atuadores e sensores devido a sua capacidade de acoplamento eletro-mecânico. Por serem esses materiais usados tanto como sensores quanto como atuadores, os piezelétricos são incluídos na classe de *smart materials*. É possível ainda distinguir uma classe mais sofisticada de materiais, denominada *intelligent materials*, que se diferenciam dos *smart materials* basicamente por serem capazes de responder dinamicamente a mudanças nas condições de trabalho (BARRAULT, 2006). Este pode ser o caso do piezelétrico se o sistema for ajustado para trabalhar sob certa variação de frequência. Assim, os materiais piezelétricos favorecem projetos de elementos multifuncionais, inteligentes e compactos. Essas características vão ao encontro do crescente aumento de pesquisas e desenvolvimentos no assunto. Esta dissertação faz o uso de materiais piezelétricos aplicados a estruturas, visando à construção de sistemas de controle ativo de vibração.

O projeto do sistema de controle das vibrações é fortemente influenciado pelas características dinâmicas do sistema, i.e., conhecer a resposta do sistema devido a ações externas torna-se importante para antecipar os níveis de vibração e determinar as ações a serem tomadas. Assim, o modelo do sistema é fundamental para um projeto eficiente de controladores. O Método dos Elementos Finitos (MEF) tem se mostrado uma ferramenta robusta e eficiente na modelagem de sistemas, em especial devido aos avanços tecnológicos dos computadores digitais nas décadas recentes. Neste trabalho, o MEF é usado para modelar as estruturas piezelétricas, tanto no que concerne ao campo elétrico, quanto ao campo mecânico do material.

O MEF gera um modelo de múltiplos graus de liberdade do sistema. As equações dinâmicas do modelo podem tomar diversas formas, dependendo da escolha do sistema de coordenadas usado, e, quase que invariavelmente, coordenadas físicas levam a equações dinâmicas acopladas entre si. Em muitos casos é possível desacoplar o sistema de equações colocando-o no chamado sistema de coordenadas natural. Na dinâmica esse sistema de coordenadas é conhecido como modos de vibração mecânica. Os sistemas de equações desacopladas são evidentemente mais fáceis de obter soluções que os sistemas de equações acopladas. No projeto de controladores, Barrault (2006) ressalta que sistemas desacoplados em geral levam a esquemas de controle mais simples que os de sistemas acoplados, razão pela qual este estudo faz uso do método de análise modal para desacoplar o sistema de equações obtido via MEF.

O Capítulo 2 parte de um contexto histórico da piezeletricidade seguido de uma revisão bibliográfica em ordem cronológica dos principais trabalhos (relacionados à piezeletricidade, vibração e MEF) que guiaram esta dissertação. Na sequência do capítulo é apresentado um conjunto de assuntos relacionados ao material piezelétrico tais como particularidades fenomenológicas, cristalografia, características elétricas, modos de construção de sensores e atuadores.

O Capítulo 3 reúne as formulações matemáticas da piezeletricidade e modelagem em elementos finitos. Este capítulo apresenta as equações cinemáticas, as equações constitutivas e as equações dinâmicas do meio piezelétrico. O princípio variacional concernente ao meio piezelétrico é resolvido para placa sanduíche com piezelétricos colados na superfície. Em seguida particiona-se esta equação dinâmica usando MEF. Como resultado é obtido um sistema de múltiplos graus de liberdade acoplados tanto no que concerne ao sistema de equações quanto à interdependência eletro-mecânica.

O Capítulo 4 desacopla o sistema de múltiplos graus de liberdade pelo método de análise modal. As particularizações ocasionadas pelo acoplamento eletro-mecânico são analisadas. Uma nova forma de escrever as equações sob o ponto de vista de entradas e saídas do sistema é proposta. O amortecimento proporcional é incluído nas equações desa-

copladas. A solução tradicional para equação dinâmica diferencial de segunda ordem é brevemente exposta.

O Capítulo 5 trata do controle ativo de vibrações. É iniciado escrevendo-se o sistema dinâmico desacoplado na forma de espaço de estados. A estrutura de controle *feedback* é apresentada e uma viga sanduíche com piezelétricos é usada como exemplo. Duas técnicas de controle são introduzidas, o controle ótimo e o controle modal.

O Capítulo 6 traz os resultados obtidos no desenvolvimento do presente trabalho, que são divididos em três partes principais: MEF, análise modal e projeto de controle, sendo que cada modelo apresentado complementa os modelos estudados anteriormente.

Por fim, as considerações finais são apresentadas no Capítulo 7 juntamente com propostas de continuidade do trabalho.



## **CAPÍTULO 2**

### **REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Elementos estruturais dotados de atuadores e sensores piezelétricos estão, gradativamente, sendo usados em maiores aplicações na área de controle estático, dinâmico e de vibrações. Dentro deste âmbito, destacam-se três grandes frentes de estudo: modelagem estrutural, especialmente no que tange ao método de elementos finitos; otimização, tanto no que diz respeito à localização quanto à forma dos elementos e, por fim; técnicas de controle. Este trabalho abrange a área de controle ativo de vibrações com ênfase na modelagem estrutural por elementos finitos. Técnicas de controle são usadas para fins de mensurar e testar os resultados do modelo desenvolvido.

Uma breve revisão bibliográfica é apresentada para situar esta dissertação no contexto científico da atualidade. Apresenta-se aqui um resumo dos principais trabalhos que guiaram o desenvolvimento desta dissertação.

Torna-se pertinente iniciar esta revisão com um histórico científico de materiais piezelétricos. Os principais trabalhos que guiaram esta introdução num contexto histórico como introdução foram Gautschi (2002), Manson (1981) e Cady (1964). Gautschi apresenta um importante resumo sobre a descoberta do efeito da piezeletricidade desde antes de sua propagação pela Europa, tratando de forma minuciosa, com referência aos principais trabalhos históricos. Uma lista quase completa de trabalhos publicados sobre sensores piezelétricos é tratada por Gautschi até início da década de 1930. Já Manson, em 1981, lança um artigo dedicado à história da piezeletricidade em decorrência da comemoração dos cem anos dos estudos dos irmãos Pierre e Jacques Curie. Apesar de não ser tão minucioso como Gautschi, Manson traz informações importantes sobre trabalhos relacionados ao desenvolvimento do material em si, além de apresentar outras aplicações não mencionadas por Gautschi. Cady, por sua vez, apresenta uma obra de extrema importância no estudo da piezeletricidade. Mencionada em uma grande maioria dos resumos e trabalhos sobre o assunto; sua obra, dividida em dois volumes, traz em sua introdução o contexto histórico da piezeletricidade incluindo inclusive trechos e citações de importantes obras históricas.

#### **2.1 História da Piezeletricidade**

O efeito da piezeletricidade teve origem na observação dos cristais de turmalina, facilmente encontrados no Ceilão e na Índia. Os nativos dessa região notavam que estes cristais, quando jogados em cinzas quentes, se atraíam momentaneamente e depois se repeliavam. Os cristais de turmalina foram importados para a Europa no início do século XVIII por

mercadores holandeses, onde ficou conhecido como magneto de Ceilão. Em 1756, o físico alemão Aepinus demonstrou a natureza elétrica deste magneto na Europa, entretanto, somente em 1824, o físico escocês D. Brewster, introduziu o termo piroeletricidade, pelo qual o fenômeno é conhecido até os dias atuais. O efeito da piroeletricidade ficou definido como a polarização devido à absorção de energia térmica (PIEFORT, 2001; GAUTSCHI, 2002).

Influenciado pelo estudo da piroeletricidade, o primeiro a observar a presença de cargas elétricas no cristal da turmalina quando submetida à tensão mecânica foi René Just Haüy, um mineralogista francês, em 1817. No entanto, segundo Gautschi (2002), seu estudo foi incompleto ao tentar estabelecer uma relação entre tensão mecânica e cargas elétricas.

A demonstração experimental dessa relação eletromecânica foi realizada pelos irmãos Pierre e Jacques Curie em 1880, resultando na primeira teoria e dedução matemática deste efeito em 1881, por G. Lippman. No mesmo ano, o termo piezeletricidade foi introduzido por W.G. Hankel, sendo amplamente aceito pela comunidade científica. A relação entre piezeletricidade e estrutura cristalina, iniciada nos trabalhos dos irmãos Curie, foi tratada de maneira minuciosa por Woldemar Voigt, em 1894, que analisou as 32 classes cristalinas existentes (MANSON, 1981; GAUTSCHI, 2002).

A primeira aplicação prática da piezeletricidade ocorreu durante a Primeira Guerra Mundial. Incentivado pela grande perda de navios aliados por submarinos alemães, o físico francês Paul Langevin, discípulo de Pierre Curie, inventou o sonar usando cristais de quartzo como elemento transdutor. Terminado em 1917, pouco antes do fim da guerra, o experimento de Langevin se mostrou um importante instrumento para medição de profundidade submarina (CADY, 1964).

Após a Primeira Grande Guerra, mais aplicações foram desenvolvidas usando cristais de quartzo como transdutor. G. W. Pierce, inventor do interferômetro ultrasônico, e Wood e Loomis, com as primeiras aplicações de ultra-sons em experiências biológicas, são citados por Manson (1981).

Gautschi (2002), por sua vez, enfatiza trabalhos relacionados a medições de pressão feitas por Thomson, Hull, Keys, Karcher, Tschappat e Okochi entre 1919 e 1925, e sensores de vibração, realizados por Wood em 1921, Okochi em 1928, seguido por Miyamoto, Yamaguchi e Kato em anos seguintes.

Antes dominado por cientistas franceses e alemães, o estudo da piezeletricidade passou a ser amplamente difundido no Japão, por Masatosi Okochi, e nos Estados Unidos, por W. G. Cady. De fato, um dos grandes estudiosos e referência da piezeletricidade moderna foi o Dr. Walter Guyton Cady, físico e engenheiro eletricitista norte americano. Na década de 1920, Cady usou cristais de quartzo em osciladores de frequência e filtros eletrônicos, inventando o ressonador de frequência. Por ocasião da Segunda Guerra Mundial, os



circuitos piezelétricos se multiplicaram aos milhões, sendo usados em sonares, sistemas de comunicação, radares, entre outros.

Ainda na Segunda Guerra Mundial, os cristais de quartzo foram substituídos por sal de Rochelle nos sonares e transdutores subaquáticos. O sal de Rochelle foi o primeiro material ferroelétrico conhecido, que se caracteriza por apresentar uma polarização espontânea, resultando em um elevado acoplamento eletromecânico e alta sensibilidade piezelétrica. Manson em 1981 cita que mais de cem materiais ferroelétricos são conhecidos até em então.

No final dos anos 40, Von Hippel, nos Estados Unidos, e Goldman, na União Soviética, desenvolveram materiais ferroelétricos policristalinos conhecidos como cerâmicas piezelétricas (MASON, 1981), sendo que ambos usaram o titanato de bário como solução base da textura. Hoje, a mais conhecida e comercialmente disponível cerâmica piezelétrica consiste da solução sólida de zirconato de chumbo ( $\text{PbZrO}_3$ ) e titanato de chumbo ( $\text{PbTiO}_3$ ), denominado comumente por PZT<sup>1</sup>. As cerâmicas desenvolvidas possuem propriedades piezelétricas até cem vezes maiores que as observadas nos cristais simples como o quartzo e a turmalina.

Entretanto, um dos motivos que alavancou as aplicações e a comercialização das cerâmicas foi o processo de fabricação que permite produção quase ilimitada de formas a um baixo custo. Desde então, as aplicações de materiais piezelétricos multiplicaram-se significativamente, englobando as áreas de eletrônica, mecânica e biológica. Diversos são os trabalhos publicados que possuem como foco principal essas diversas linhas de atuação.

Este trabalho objetiva a aplicação de cerâmicas piezelétricas, na engenharia mecânica, como forma de amortecimento estrutural. Para obter o referido amortecimento, são necessários conhecimentos de eletricidade, em que é possível usar técnicas de controle passivo (por dissipação de energia elétrica em componentes eletrônicos) ou ativo (pelo uso de um controlador para contrapor o sinal elétrico da cerâmica).

Durante este estudo foram necessários conhecimentos em piezeletricidade, vibrações mecânicas, modelagem, método de elementos finitos, eletromagnetismo e controle. Uma revisão bibliográfica dos principais trabalhos e avanços em piezeletricidade será realizada a seguir, apresentando-se essas matérias sob o ponto de vista da engenharia mecânica.

---

<sup>1</sup> Acrônimo para *Plumbus Zirconate Titanate*

## 2.2 Método dos Elementos Finitos e Piezeletricidade

Tiersten (1967) apresenta a formulação variacional de Hamilton para piezeletricidade linear de meios contínuos. O principal resultado consiste em demonstrar que o Lagrangiano para o caso piezelétrico resulta da diferença entre a energia cinética e a entalpia piezelétrica; desta forma, as equações diferenciais e condições de contorno são condizentes com a teoria linear. Por fim, Tiersten, finaliza o artigo com uma breve discussão sobre as aplicações do princípio variacional para busca de soluções aproximadas, preparando assim o caminho para modelagem computacional.

Dentre os métodos de modelagem matemática e computacional, o MEF se destaca em diversas áreas da engenharia. No que concerne à piezeletricidade, Allik e Hughes em 1970, citados por Piefort (2001) e Abreu (2003), foram os primeiros a descrever o comportamento dos materiais piezelétricos em elementos finitos. Um elemento sólido tetraedro de quatro nós é formulado, em que cada nó contém 3 graus de liberdade (GL) de deslocamento e 1 grau de liberdade elétrico.

Tzou e Tseng (1990) formularam um elemento sólido hexaedro para material piezelétrico usando o princípio variacional de Hamilton. O elemento formulado é usado para modelar placas piezelétricas finas. Para evitar os problemas de *shear locking* e matriz mal-condicionada, causado em decorrência da espessura reduzida da placa, são introduzidos nós internos para dissipar o excesso de energia de cisalhamento. O elemento contém 8 nós com 4 GL (3 de deslocamento e 1 elétrico) e 3 nós internos. Derivado o sistema de equações, o procedimento de redução de *Guyan* é usado em duas etapas: (1) nos graus de liberdade referentes aos nós internos, e (2) nos graus de liberdade elétricos. O modelo dinâmico reduzido é então usado na análise modal e distribuição de potencial elétrico de uma placa simplesmente apoiada. Um sistema com realimentação negativa de ganho constante é usado no controle de vibração da placa.

Hwang e Park (1993) deduziram um elemento finito quadrilateral contendo piezelétricos nas camadas superiores e inferiores de laminados compostos. A Teoria Clássica de Placas Laminadas (CLPT) é usada no modelo, e somente as parcelas de flexão são consideradas. O elemento possui 3 GL mecânicos por nó e 1 GL elétrico por elemento, em um total de 13 GL no elemento. Um único grau de liberdade elétrico no elemento é justificável, visto que as variáveis elétricas são integradas na superfície do piezelétrico que contém o eletrodo. O sistema discreto gerado via MEF é validado para uma viga bimorfa (duas placas piezelétricas opostas uma a outra) sujeita a carregamento estático. O efeito de vibração livre é analisado para um controle de velocidade com realimentação negativa. As respostas são obtidas pelo método de integração direta de *Newmark* e as razões de amortecimento modal são determinadas via equação de espaço de estados.

Zhang e Sun (1996) derivaram equações analíticas para solução estática de viga sanduíche com piezelétrico. O sanduíche é composto de uma alma de piezelétrico coberta com faces de alumínio. O piezelétrico é posicionado de forma a atuar no deslocamento da viga usando a propriedade piezelétrica de cisalhamento quando um potencial elétrico é aplicado. É assumida como hipótese de deslocamento a teoria de *Euler-Bernoulli*, para as faces de alumínio, e a teoria de *Timoshenko*, para a alma de piezelétrico. O uso de diferentes teorias ao longo da espessura da viga impõe uma condição de continuidade do deslocamento nas interfaces das lâminas. A formulação desenvolvida é adaptada para o caso de viga sanduíche em que as faces são constituídas de piezelétricos e a alma de alumínio, caso em que os piezelétricos trabalham com a constante piezelétrica de deformação axial. As duas formulações são testadas para uma viga engastada, sujeita a um potencial elétrico constante. Os resultados são comparados com modelos numéricos desenvolvidos no programa comercial ANSYS®, e apresentam boa convergência. Por fim, os autores concluem que o uso de atuadores piezelétricos no meio do sanduíche, quando possível, apresenta o benefício de não possuir tensões axiais significativas em relação aos piezelétricos montados na superfície.

Han e Lee (1998) apresentam um modelo de elementos finitos para placa laminada de material composto contendo atuadores piezelétricos fixados na superfície externa do laminado. O modelo desenvolvido usa como hipótese de deslocamento a Teoria de Placas em Camadas Discretas (LWPT), que permite uma descrição mais refinada da deformação no laminado. Sendo os piezelétricos quase impossíveis de serem engastados em um experimento real, os GL de deslocamento do modelo LWPT são liberados para as camadas piezelétricas, e o novo modelo com Condições de Contorno Realistas (RBC) é denominado por LWPT com RBC. Uma viga laminada coberta por piezelétricos na superfície inferior e superior, modelada como placa e usando a Teoria de Primeira ordem com Deformação Cisalhante (FSDT); sendo esta, usada como exemplo de comparação para a mesma viga modelada por LWPT e por LWPT/RBC. Os resultados de frequência natural e amortecimento modal são confrontados para os três modelos considerados. Os modelos que consideram o piezelétrico engastado, FSDT e LWPT, apresentam resultados semelhantes sem diferença significativa. O modelo em que o piezelétrico não faz parte do engaste, LWPT com RBC, mostrou que ocorre uma redução constante na frequência natural e no amortecimento modal para todas as configurações de laminado simétrico.

Reddy (1999) apresenta soluções analíticas para placa compósita laminada integrada a atuadores e sensores piezelétricos. Duas teorias são usadas como hipótese de deslocamento, a saber, CLPT e Teoria de Deformação Cisalhante de Terceira-ordem para Laminados (TODL). Não-linearidade geométrica é levada em consideração incluindo o termo de deformação de *von Kármán* no tensor de deformação. As parcelas de piezeletricidade são incluídas nas equações dinâmicas de placa via vetor cargas, hipótese esta válida quando o

potencial elétrico é conhecido. As propriedades do laminado são determinadas usando a teoria de camada equivalente única. As equações dinâmicas para placa são resolvidas propondo-se o método de solução de *Navier*. Resolução detalhada é apresentada, considerando somente a hipótese linear, i.e. excluindo a parcela de *von Kármán* na solução. Em adição à solução analítica proposta, o método dos elementos finitos também é apresentado, partindo-se da forma fraca do problema. Somente o caso linear é apresentado na formulação MEF. Resultados das teorias formuladas não são apresentados.

Piefort (2001) apresenta uma breve revisão sobre *smart materials* enfatizando as características, propriedades, vantagens e desvantagens de materiais piezelétricos neste contexto. Uma revisão sobre modos de operação para atuador/sensor aplicado a placas laminadas é realizada. Efeitos fenomenológicos e equação unidimensional do ponto de vista eletromagnético para equação constitutiva são apresentados, em seqüência equações constitutivas mais gerais são derivadas partindo-se do princípio termodinâmico. Uma formulação com aproximação por MEF é resolvida para placa sob hipótese cinemática de *Kirchhoff* para elemento multi-laminado, i.e. CLPT. A formulação anterior é estendida para o caso de placas sob a hipótese de *Mindlin*, que para o caso de placas multi-laminadas resulta na FSDT. As formulações desenvolvidas são implementadas no programa comercial SAMCEF®, e informações mais detalhadas sobre o elemento são suprimidas. Um método de extrair o modelo em espaço de estados usando o sistema modal discretizado por MEF é apresentado, em que atenção especial é dada às condições de contorno elétricas. Várias aplicações são desenvolvidas; cita-se, aqui, a investigação sobre os efeitos localizados de sensores e atuadores colocados próximos uns dos outros. Resultados experimentais e numéricos mostraram que os zeros das funções de transferência podem ser muito afetados pelo efeito de proximidade dos sensores e atuadores.

Fernandes e Pouget (2001) usaram o princípio variacional de Hamilton para derivar as equações dinâmicas de placas piezelétricas com acoplamento eletro-mecânico. O modelo de aproximação cinemática para o deslocamento na espessura, causado pelo cisalhamento transversal, assume a forma senoidal; e, para o modelo do potencial elétrico, é incluída uma parcela quadrática e uma trigonométrica, além do termo linear. A solução do problema é apresentada sob a forma de expansão em séries de Fourier. Um exemplo de placa, simplesmente apoiada e sujeita à flexão cilíndrica é modelado. Foram investigados três casos de condições de contorno para o problema: (1) força distribuída na superfície da placa, em circuito fechado e em circuito aberto; (2) potencial elétrico aplicado; e (3) carga elétrica aplicada. Os casos estudados na modelagem apresentada são comparados a resultados de modelos de elementos finitos do programa comercial ABAQUS® com um elemento biquadrático de 8 nós em condição de deformação plana. Os resultados apresentam boa convergência com a teoria apresentada.

Sunar, Hyder e Yilbas (2001) investigaram a determinação de parâmetros relativa ao projeto robusto de atuadores piezelétricos para controle estrutural. A metodologia de *Taguchi* é usada para determinar os efeitos das variáveis de projeto no desempenho do controle. Um exemplo de viga engastada contendo pares de atuadores é modelado usando MEF. Os resultados indicam vários aspectos importantes no dimensionamento de atuadores, dos quais se citam: (1) o aumento na espessura do atuador possui um maior efeito no controle da viga comparando-se com o aumento na largura, (2) os atuadores colocados próximo ao engaste apresentam melhor eficiência de controle em vigas engastadas.

Lee, Yuen, Ng e Cheng (2002) apresentaram uma formulação aproximada por MEF para um modelo de placa flexível contendo material piezelétrico. CLPT é usada nas relações deformação-deslocamento, acrescido do termo não linear de von Kármán para representar grandes deslocamentos da placa flexível. É investigado o controle de vibração randômica para placas isotrópicas. Uma transformação modal no sistema discreto não linear é realizada usando os modos de vibração do problema linear. O sistema reduzido na forma modal é re-escrito na forma de espaço de estados para as simulações de controle. Os parâmetros de um controlador  $H_\infty$  são ajustados baseados no sistema linear do modelo reduzido na forma modal. O desempenho do controle aplicado a sistemas com grande deslocamento não se mostra satisfatório.

Benjeddou, Deü e Letombe (2002) propõem uma solução analítica exata para vibração livre de placas piezelétricas simplesmente apoiadas. O campo de deslocamento é baseado na teoria LWPT e o potencial elétrico é descrito por uma função quadrática na espessura da placa. A solução na forma de séries de *Fourier* condizente com as condições de contorno é assumida considerando o movimento harmônico da vibração. As equações dinâmicas, acopladas via equação constitutivas, são obtidas partindo-se do princípio do trabalho virtual. As equações dinâmicas eletro-mecânica são acopladas via equação constitutiva generalizada, sendo esta última obtida pela vez para piezeletricidade 2D. O problema de vibração livre é resolvido pelo método modal usando a redução de *Guyan* nos graus de liberdade elétricos, o que leva a uma alteração da rigidez no problema modal.

Ng, He e Liew (2002) investigam o uso de *functionally graded material* (FGM) como alma de placas sanduíche cobertas por piezelétrico. O modelo assume a hipótese cinemática de primeira ordem, FSDT, para o deslocamento mecânico, e potencial elétrico linear para o campo elétrico. O modelo é implementado por MEF usando um elemento bilinear (4 nós) com 6 GL por nó (5 deslocamentos, 1 elétrico). Obtido o sistema de equações, uma lei de controle por ganho constante de deslocamento e velocidade é usado para controlar o potencial do atuador, sendo que, a realimentação é feita pelo potencial gerado no sensor. O resultado da técnica de controle insere uma parcela de rigidez e amortecimento no sistema dinâmico, melhorando as características de atenuação do sistema.

Abreu (2003) investiga o projeto de controlador robusto  $H_\infty$  para vigas e placas contendo pastilhas piezelétricas fixadas na superfície. A primeira parte do trabalho consiste na obtenção de modelos dinâmicos para o projeto do controlador. Abreu usa 3 formas de modelagem: formulação contínua por modos assumidos, formulação discreta por MEF e, obtenção do modelo de elementos finitos via programa comercial ANSYS®. As hipóteses de deslocamento, tanto na formulação contínua quanto na formulação por MEF, usam CLPT. A descontinuidade das pastilhas piezelétricas ao longo da viga/placa na formulação contínua é representada pela função de *Heaviside*. O modelo discreto para placa formulado por MEF usa um elemento quadrilateral bilinear (4 nós) com 3 GL de flexão por nó, e 2 GL elétrico por elemento (1 para o sensor e 1 para o atuador). O modelo via programa comercial usa um elemento hexaédrico de 8 nós com 3 GL de deslocamento e 1 GL elétrico por nó. A análise dos resultados estáticos mostra uma boa concordância para o deslocamento entre o modelo MEF e o do ANSYS®, entretanto o potencial elétrico no sensor não apresenta o mesmo resultado.

Até o momento, foram expostos vários trabalhos relacionados à simulação numérica de estruturas piezelétricas. No que diz respeito a trabalhos práticos de laboratório, Baillargeon e Vel (2005) confrontaram resultados de controle entre análises numéricas e experimentais para uma viga sanduíche engastada. O sanduíche é composto por faces de alumínio, e a alma contém duas pastilhas de piezelétrico próximas ao engaste sendo o resto preenchido com espuma. O piezelétrico trabalha com a propriedade de cisalhamento proposta por Zhang e Sun em 1996. O modelo numérico utiliza o programa comercial de elementos finitos ABAQUS®, utilizando elementos quadráticos (8 nós), quadrilateral. A função resposta em frequência (FRF) da análise numérica é comparada com a experimental, sem controle. Em seguida, dois sistemas de controle são projetados: *Positive Position Feedback* (PPF) e *Strain Rate Feedback* (SRF). A análise paramétrica para determinar os valores de ganho dos controladores é feita no modelo numérico. As FRF do sistema controlado experimental e numérico mostram boa concordância. O controle mostra-se efetivo para o controle em transiente devido a distúrbios na viga.

Ahmad, Upadhyay e Venkatesan (2006) desenvolveram as equações para o modelo eletro-termo-elástico de um material piezelétrico. As equações constitutivas são obtidas aplicando-se a segunda lei da termodinâmica, enquanto que o princípio de conservação da energia é usado para obter as equações da dinâmica do sistema. Baseado nestas equações uma formulação variacional e um modelo em elementos finitos são desenvolvidos. Foi usado um polinômio cúbico como base de aproximação do deslocamento axial e um polinômio quadrático para aproximação do potencial elétrico. Os resultados do modelo gerado são comparados com a literatura de referência mostrando resultados coerentes.

## 2.3 Fenômeno da Piezeletricidade

### 2.3.1 Efeito da Piezeletricidade

A piezeletricidade pode ser vista como uma interação entre o estado mecânico e o estado elétrico de um material. De fato, a piezeletricidade envolve dois amplos campos da engenharia: a mecânica e a elétrica. Essa interação ocorre de duas formas recíprocas, chamadas efeito direto e efeito inverso da piezeletricidade, conforme representado na Figura 2.1 a seguir.

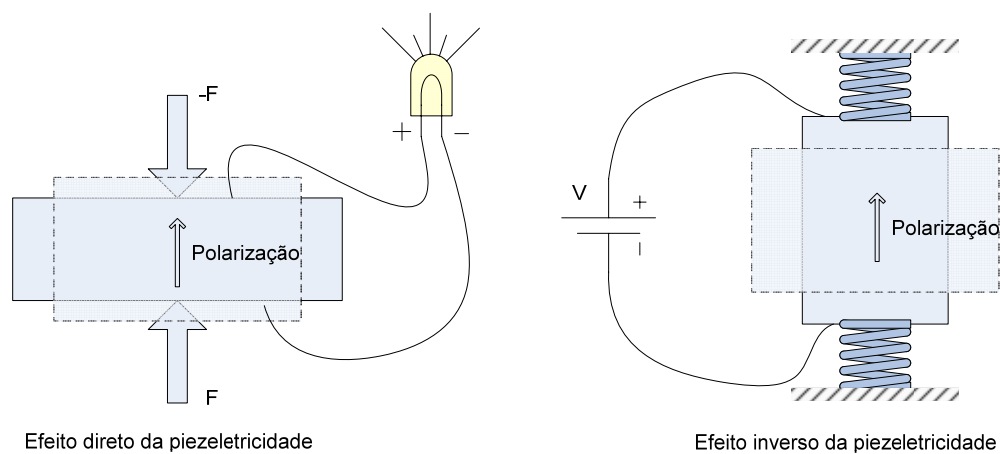


Figura 2.1: Efeitos, direto e inverso, da piezeletricidade.

O efeito direto da piezeletricidade ocorre quando uma deformação mecânica no material piezelétrico proporciona uma polarização elétrica; isto é, cargas elétricas aparecem em faces opostas do material quando este está sob carregamento mecânico. O efeito inverso da piezeletricidade ocorre quando o material, imerso em um campo elétrico, apresenta uma deformação e/ou tensão mecânica condizente com a restrição mecânica; isto é, ao se aplicar uma diferença de potencial elétrico em faces opostas do material este reage com uma deformação mecânica.

A primeira vista pode ser induzido que, do ponto de vista mecânico, o efeito direto e inverso da piezeletricidade representam respectivamente o uso do dispositivo como sensor e como atuador. Contudo, cautela deve ser tomada nesta comparação. Gautschi (2002) apresenta um fluxograma de aplicações piezelétricas classificadas pelo efeito, representado na Figura 2.2. Vale notar que os geradores de fagulhas (acendedores), na condição de atuadores, usam do efeito direto piezelétrico, assim como os sensores ressonantes utiliza do efeito inverso da piezeletricidade. Pode-se citar também, o uso de materiais piezelétricos em

componentes eletrônicos não transdutores, como é o caso de osciladores, filtros, geradores de frequência, dentre outros.

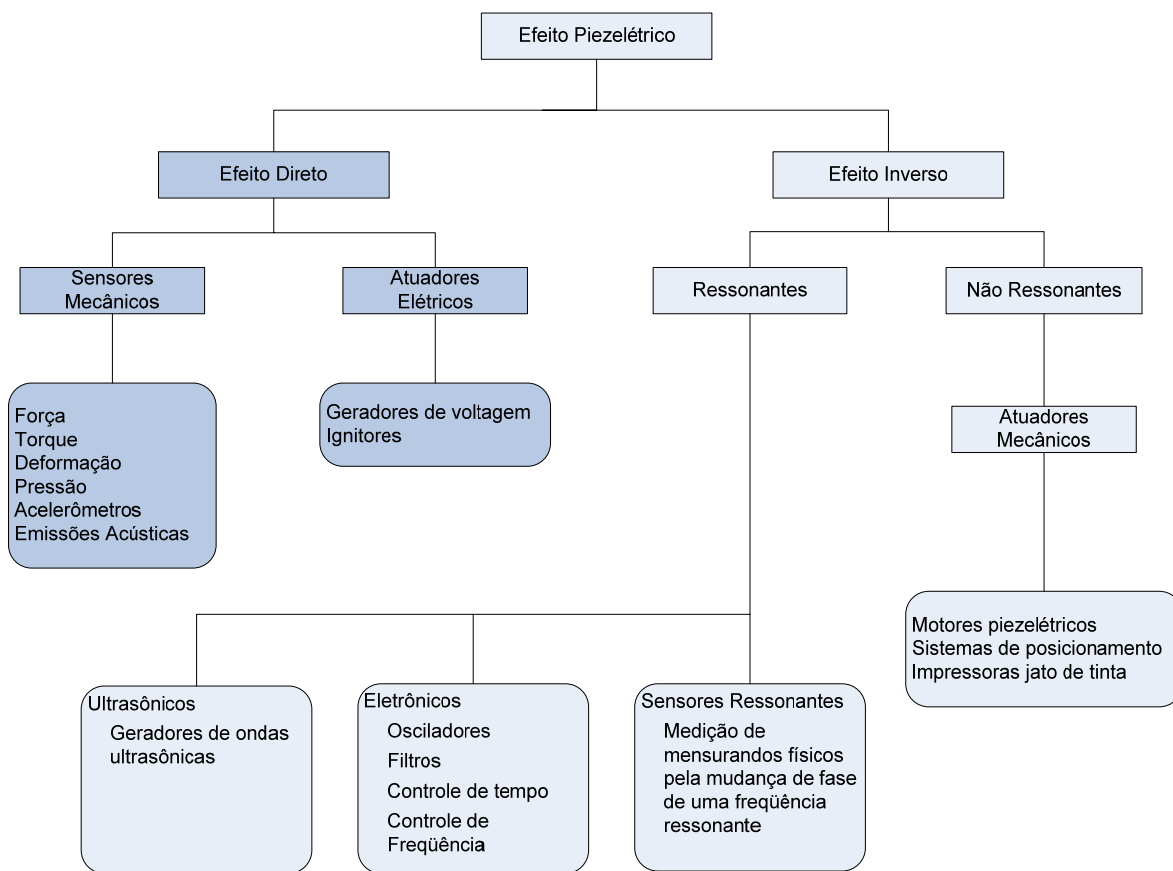


Figura 2.2: Aplicações do efeito piezelétrico.

### 2.3.2 Polarização Elétrica

A interação entre mecânica e elétrica somente é possível se o material for constituído de partículas capazes de serem polarizadas sob efeito de um campo elétrico (PIEFORT, 2001). Isto se torna possível em materiais cuja estrutura cristalina não apresenta centro de simetria. De certa maneira, os materiais piezelétricos se comportam similarmente a capacitores elétricos.

Um capacitor constitui-se de duas placas condutoras separadas por um dielétrico. Para explicar seu funcionamento, consideram-se duas placas condutoras<sup>2</sup> separadas por uma distância  $h$ . Ao aplicar-se um potencial elétrico  $\phi$ , uma quantidade de cargas elétricas

<sup>2</sup> Considere-se que as placas condutoras possuem espessura desprezível em relação às demais dimensões. Nos piezelétricos essas placas são referidas como eletrodos.



$\pm Q = \pm \rho \Omega$  aparece nas placas, sendo  $\rho$  a quantidade de cargas por área da placa e  $\Omega$  o domínio de área da placa. As cargas elétricas geradas, por sua vez, induzem um campo elétrico  $E_0$  que flui de uma placa à outra, conforme Figura 2.3 (a).

Introduzindo um dielétrico entre as placas, e mantendo o potencial elétrico aplicado, a quantidade de cargas total permanece inalterada. Contudo, o campo elétrico total  $E_0$  fica enfraquecido devido à reorientação dos dipolos presentes no dielétrico, que formam um campo elétrico oposto ao campo inicial, como mostra a Figura 2.3 (b). Como resultado, é obtido o campo elétrico externo  $E$ .

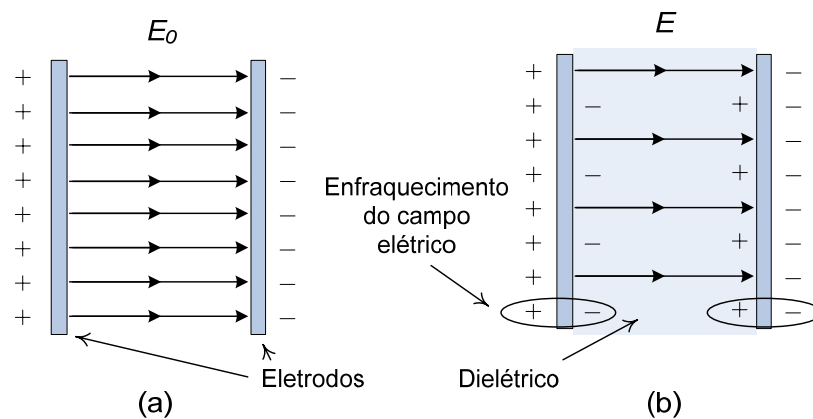


Figura 2.3: Campo elétrico entre placas paralelas de um capacitor (a) sem dielétrico e (b) com dielétrico.

Tipler (1991) apresenta algumas relações da eletrostática linear considerando a hipótese de duas placas paralelas infinitas<sup>3</sup>. Nessa linha, tem-se que o campo elétrico gerado devido à diferença de potencial aplicado é inversamente proporcional à distância  $h$  que separa as placas de acordo com a relação,

$$E_0 = \frac{\phi}{h} \quad (2.1)$$

Quando um dielétrico é inserido entre as placas, o campo elétrico inicial  $E_0$  é enfraquecido por uma constante  $\kappa$ , resultando em um campo elétrico externo  $E$ , dado por:

<sup>3</sup> A hipótese de placas paralelas infinitas é válida desde que a distância entre placas  $h$  seja muito pequena se comparada às dimensões de largura e comprimento da placa.

$$E = \frac{E_0}{\kappa} \quad (2.2)$$

em que  $\kappa$  é a constante dielétrica do material – ou permissividade relativa – e é dado como a relação entre a permissividade absoluta do material,  $\epsilon$ , e permissividade do vácuo,  $\epsilon_0 = 8.854 \text{ pF/m}$  :

$$\kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (2.3)$$

Aplicando-se a lei de Gauss para meios dielétricos, e resolvendo para a hipótese de placas paralelas infinitas, é obtida a relação entre carga elétrica total  $Q$  e a diferença de potencial elétrico  $\phi$  na forma:

$$\phi = \frac{Q}{C} \quad (2.4)$$

em que a capacitância  $C$  é uma função da propriedade dielétrica e da geometria da placa.

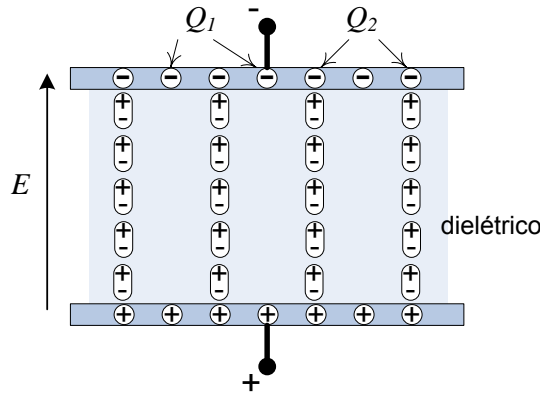


Figura 2.4: Distribuição de cargas em um capacitor de placas paralelas com dielétrico.

Seja a distribuição de cargas em um capacitor de placas paralelas com dielétrico ilustrado na Figura 2.4. A carga total na placa é dada pela quantidade de cargas livres,  $Q_1$ , e quantidade de cargas ligadas,  $Q_2$ . Nota-se que somente as cargas livres são responsáveis pelo campo elétrico externo  $E$ . A carga total  $Q$  em termos da permissividade relativa é dada por:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{Q}{\kappa} + Q \left( 1 - \frac{1}{\kappa} \right) \quad (2.5)$$

sendo

$$Q_1 = \frac{Q}{\kappa}, \quad Q_2 = 1 - \frac{1}{\kappa} \quad (2.6)$$

De forma análoga, a densidade de cargas  $\varrho$ , definida como carga por unidade de área, pode ser escrita como:

$$\varrho = \frac{\varrho}{\kappa} + \varrho \left( 1 - \frac{1}{\kappa} \right) \quad (2.7)$$

Sejam apresentadas as definições:

- Deslocamento elétrico (Cb/m<sup>2</sup>)  $D = \varrho$  (2.8)

- Polarização (Cb/m<sup>2</sup>)  $P = \varrho \left( 1 - \frac{1}{\kappa} \right)$  (2.9)

- Campo elétrico (V/m)  $E = \frac{\varrho}{\epsilon}$  (2.10)

Levando as Eqs. (2.10) e (2.9) à Eq. (2.7), o deslocamento elétrico, Eq. (2.8), pode ser obtido em termos do campo elétrico e da polarização na forma:

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (2.11)$$

e, ainda, combinando as Eqs. (2.9) e (2.10), chega-se à equação da polarização em termos do campo elétrico externo:

$$P = (\epsilon - \epsilon_0) E \quad (2.12)$$

Substituindo adequadamente a Eq. (2.12) na Eq. (2.11) chega-se finalmente a,

$$D = \epsilon E \quad (2.13)$$

que é a equação constitutiva para meios dielétricos. Para meios piezelétricos, esta relação é acrescida do termo de acoplamento eletro-mecânico. No capítulo seguinte, a equação constitutiva piezelétrica será formalizada de maneira mais consistente na forma completa. Neste momento, a relação derivada na Eq. (2.13) é suficiente para compreender a relação entre polarização e campo elétrico.

### 2.3.3 Cristalografia de Materiais Piezelétricos

Preliminarmente, cumpre tecer breves considerações acerca da mecânica dos materiais, que é de fundamental importância na classificação e determinação das propriedades dos materiais piezelétricos.

Em sua grande maioria, materiais piezelétricos são sólidos cristalinos. O termo cristal é aplicado aos sólidos cuja estrutura atômica possui um único padrão de arranjo molecular (células unitárias) repetido ao longo de seu corpo. Estes podem ser monocristais (naturais ou sintéticos) ou policristalinos (como as cerâmicas ferroelétricas). Os cristais apresentam propriedades em termos do sistema de coordenadas naturais, inerente ao próprio cristal (CALLISTER Jr., 2002).

O segmento da ciência que estuda as propriedades dos materiais sob o ponto de vista da estrutura cristalina é a cristalografia. Ao tornar possível a aplicação dos conceitos e propriedades do sistema cristalino, apresentando-os em termos do sistema Cartesiano de coordenadas, a cristalografia torna-se essencial ao estudo da mecânica do contínuo.

A cristalografia dispõe de uma nomenclatura sofisticada e de um rico acervo de dados para caracterizar o material. De acordo com o grau de simetria, os cristais são classificados em sete sistemas (IEEE, 1988): triclinico (menos simétrico), monoclinico, ortorrômbico, romboédrico ou trigonal, tetragonal, hexagonal e cúbico. Por sua vez, estes sete sistemas são subdivididos em 32 (trinta e duas) classes. Conforme visto na Seção 2.3.2, para que um material apresente características piezelétricas, este não deve possuir estrutura cristalina centro-simétrica. Piefort (2001) salienta que das 32 (trinta e duas) classes cristalinas, 21 (vinte e uma) apresentam estrutura não-simétrica; destas, apenas uma não apresenta comportamento piezelétrico. Assim, tem-se 20 (vinte) classes cristalinas com características piezelétricas. Importante notar que todos os sistemas cristalinos contêm ao menos uma classe piezelétrica.

Outros materiais piezelétricos, além dos sólidos cristalinos, são os polímeros ferroelétricos e alguns materiais biológicos (SETTER, 2002). Dos polímeros ferroelétricos citam-se materiais da família *polyvinylidene fluorine* (PVDF) e *polyvinylidene di-fluorine* (PVF<sub>2</sub>). Estes possuem a vantagem da fácil aplicação em áreas extensas. As aplicações dos polímeros piezelétricos são possíveis tanto como atuador quanto como sensor, sendo a última preferencial na literatura devido à baixa sensibilidade piezelétrica destes polímeros. Com o avanço da ciência dos materiais, a polarização destes polímeros sob o efeito de microondas tem se mostrado efetiva em aumentar a sensibilidade piezelétrica.

De fato, a cristalografia e o estudo da estrutura molecular dos elementos piezelétricos são de fundamental importância no desenvolvimento e aperfeiçoamento das caracterís-

ticas e propriedades da piezeletricidade. Constitui-se, ainda, em uma importante fonte de dados destas características e propriedades na forma utilizada pela mecânica dos sólidos.

## 2.4 Materiais Piezelétricos

Da seção anterior pode-se dizer que os materiais piezelétricos, em sua maior parte, podem ser cristais ou polímeros capazes de serem polarizados sob uma ação mecânica. Um grande número de materiais possui propriedades piezelétricas; entretanto, apenas alguns poucos materiais possuem características expressivas, tornando-os comercialmente viáveis. Alguns exemplos de materiais piezelétricos comerciais são apresentados Tabela 1 a seguir.

Tabela 1 - Exemplos de materiais piezelétricos classificados por grupo de material.

|  |                      |   |
|--|----------------------|---|
| <i>Monocristais naturais</i>   | Turmalina            |   |
|  | Quartzo              | SiO <sub>2</sub>  |
|  | Berlinita            | AlPO <sub>4</sub>   |
|  | Niobato de lítio     | LiNbO <sub>3</sub>  |
|  | Tantalato de lítio   | LiTaO <sub>3</sub>  |
| <i>Monocristais sintéticos</i>   | Quartzo              | SiO <sub>2</sub>  |
|  | Ortofosfato de Gálio | GaPO <sub>4</sub>   |
|  | Grupo CGG            | Ca <sub>3</sub> Ga <sub>2</sub> Ge <sub>4</sub> O <sub>14</sub> |
| <i>Estruturas policristalinas</i><br><i>(cerâmicas ferroelétricas)</i> | PZT                  | Pb(Zr,Ti)O <sub>3</sub>   |
|  | PMN                  | Pb(Mg,Nb)O <sub>3</sub>   |
|  | PZN                  | Pb(Zn,Nb)O <sub>3</sub>   |
|  | Titanato de bismuto  | Bi <sub>4</sub> Ti <sub>3</sub> O <sub>12</sub>                 |
| <i>Polímeros ferroelétricos</i>  | PVDF                 | (CH <sub>2</sub> CF <sub>2</sub> ) <sub>n</sub>                 |
|  | PVF <sub>2</sub>     | (CH <sub>2</sub> F <sub>2</sub> ) <sub>n</sub>                  |
|  | KYNAR                |   |

Gautschi (2002) enumera algumas características almejadas para transdutores piezelétricos:

- Sensibilidade piezelétrica elevada,
- Resistência mecânica,
- Rigidez,
- Resistividade elétrica,
- Ampla faixa linear de trabalho,

- Estabilidade,
- Fácil usinagem,
- Baixo custo.

Em contrapartida, deseja-se evitar materiais cujos efeitos são influenciados por:

- Histerese,
- Propriedades dependentes da temperatura,
- Anisotropia.

#### 2.4.1 Cerâmicas Piezelétricas

Dos materiais piezelétricos citados, as cerâmicas piezelétricas se mostraram particularmente importantes durante as últimas décadas. Inúmeros são os estudos de piezeletricidade em que a cerâmica ferroelétrica<sup>4</sup> é foco de estudo, inclusive no que diz respeito a este trabalho. Para compreender o motivo desta popularidade, seguem alguns comentários sobre as características das cerâmicas ferroelétricas.

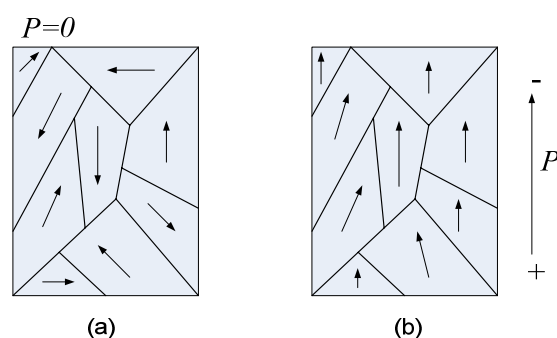


Figura 2.5: Domínios de dipolos elétricos em grãos de cerâmicas ferroelétricas (a) antes da polarização e, (b) após a polarização.

No que concerne ao processo de fabricação, as cerâmicas ferroelétricas são compostas por uma mistura de óxidos ferroelétricos comprimidos a alta temperatura. O resultado dessa mistura são cerâmicas constituídas de uma grande quantidade de grãos ferroelétricos, cujos domínios de dipolos elétricos estão randomicamente orientados, como visto na Figura 2.5 (a). Nesta fase, a cerâmica não possui uma direção de polarização preferencial e, portanto, é destituída da característica piezelétrica como um todo.

---

<sup>4</sup> A nomenclatura cerâmica ferroelétrica é usada para cerâmicas piezelétricas antes de estas possuírem uma direção de polarização preferencial. Definição material de ferroeletricidade pode ser encontrada em Setter (2002).

O surgimento da propriedade piezoeétrica ocorre quando a cerâmica ferroelétrica é polarizada. Isto pode ser obtido sob alta temperatura e mediante a aplicação de um campo elétrico forte, capaz de reorientar os domínios de grãos ferroelétricos na direção do campo aplicado.

A influência da temperatura em uma célula unitária de um grão ferroelétrico pode ser acompanhada na Figura 2.6. Acima de certa temperatura, denominada de temperatura de Curie  $T_c$ , a estrutura cristalina de uma cerâmica é centro-simétrica, abaixo desta temperatura uma mudança de fase ocorre, modificando a estrutura para não-simétrica e apresentando um dipolo elétrico natural. Quando os cristais passam de uma temperatura próxima a temperatura de Curie  $T_c$  para uma temperatura ambiente  $T < T_c$  sob a ação de um campo elétrico, os domínios de grãos tendem a se alinhar na direção do campo elétrico, como na Figura 2.5 (b). Mesmo após o desligamento do campo os domínios permanecem alinhados e a cerâmica, como um todo, passa a ter o comportamento piezoeétrico (PHYSIK INSTRUMENTE, 2005).

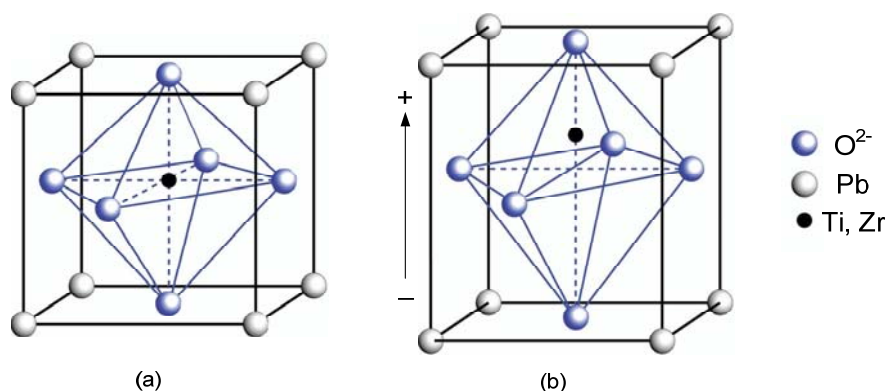


Figura 2.6: Unidade cristalina do PZT (a) Cúbico centrado acima de  $T_c$  e, (b) Tetragonal não simétrico após a aplicação de um campo elétrico e temperatura abaixo de  $T_c$ .

As cerâmicas piezoeétricas podem ser fabricadas e polarizadas em praticamente qualquer formato – planos, anéis, cilindros, cones, meia esfera, etc. – com um mínimo de usinagem. Ao passo que cristais sintéticos, como exemplo, demandam semanas de crescimento em autoclaves e um dispendioso processo de usinagem em sua fabricação. Por outro lado, a temperatura de Curie limita seriamente a utilização de cerâmicas piezoeétricas em temperaturas elevadas, podendo variar de 200 a 800 °C.

Em termos de sensibilidade piezoeétrica, as cerâmicas também trazem grande vantagem em relação aos polímeros e cristais simples. Algumas cerâmicas piezoeétricas – como PZT – possuem sensibilidade até cem vezes maior que os cristais simples e os polímeros, em ampla faixa linear de trabalho. A Tabela 2 mostra comparações entre as propriedades de

PZTs, Quartzo e Polímero. A contrapartida deste ganho em sensibilidade é a dependência das propriedades piezelétricas da temperatura, bem como o fato de que todas as cerâmicas ferroelétricas também apresentam o efeito da piroeletricidade.

Em se tratando de estabilidade, a cerâmica piezelétrica apresenta uma desvantagem em relação aos cristais simples. A polarização das cerâmicas tende a diminuir com o passar do tempo, reduzindo a sensibilidade do material. Este fenômeno é denominado *aging* (envelhecimento), sendo que os sensores são mais afetados que os atuadores. O aumento da temperatura também pode acelerar o processo. Este fenômeno não ocorre em cristais simples naturais (como o quartzo) pelo fato de serem naturalmente polarizados.

Tabela 2 – Comparativo de algumas propriedades para diferentes materiais piezelétricos.

| <i>Propriedades do material</i>                                 | <i>PZT-5A<sup>*</sup></i> | <i>PZT-5H<sup>*</sup></i> | <i>Quartzo-<math>\alpha</math><sup>*</sup></i> | <i>PVDF<sup>†</sup></i> |
|---|---------------------------|---------------------------|--|-------------------------|
| Temperatura de Curie °C   | 350                       | 260                       | 265 <sup>‡</sup>                               | 90 <sup>#</sup>         |
| Densidade $\frac{kg}{m^3}$                                      | 7700                      | 7700                      | 2650   | 1800                    |
| Módulo de elasticidade (GPa)                                    |                           |                           |  |                         |
| $E_{11}$  | 69                        | 63                        | 86   | 3                       |
| $E_{22}$  | 69                        | 63                        | 86   | 3                       |
| $E_{33}$  | 55                        | 50                        | 105  | 10                      |
| Coefficiente Piezelétrico<br>$\times 10^{-12} (C/N)$ ou $(m/V)$ |                           |                           |  |                         |
| $d_{11}$  | -                         | -                         | 2,30   | -                       |
| $d_{31}$  | -179                      | -285                      | -  | 3                       |
| $d_{33}$  | 350                       | 550                       | -  | -25                     |
| Permissividade dielétrica relativa                              |                           |                           |  |                         |
| $\kappa_{11}$   |                           |                           | 4,5  |                         |
| $\kappa_{33}$   | 1800                      | 3250                      | 4,6  | 12                      |

<sup>\*</sup> Valores extraídos de Gautshi (2002), <sup>†</sup> Piefort (2001). <sup>‡</sup> Mudança de fase. <sup>#</sup> Fusão.

## 2.5 Transdutores Piezelétricos

Os transdutores piezelétricos podem ser usados tanto como sensores quanto como atuadores. Aqui se define sensor como o instrumento capaz de gerar um sinal elétrico quando estimulado mecanicamente, atuador como o instrumento que gera um estímulo mecânico quando excitado eletricamente, e transdutor como um termo para designar tanto sensor quanto atuador.

O uso do transdutor como sensor ou atuador, pode ser matematicamente descrito pelas condições de contorno aplicadas na equação de equilíbrio do sistema. Entretanto,



deixando os formalismos matemáticos para o capítulo posterior, como introdução inicial esta relação será descrita de maneira discursiva.

Contudo, antes de discorrer sobre o sensor e o atuador, é importante identificar os modos de atuação do elemento piezelétrico que estão diretamente relacionados às propriedades constitutivas do material e à orientação do sistema de coordenadas locais do elemento. De maneira geral, o modo de atuação está relacionado à forma construtiva do elemento transdutor.

### 2.5.1 Modos de Atuação de Cerâmicas Piezelétricas

As propriedades de acoplamento eletro-mecânico dos materiais piezelétricos os tornam ideais para construção de transdutores. A forma como o elemento sensor/atuador tira proveito das propriedades da matriz de acoplamento eletro-mecânico é aqui denominada como modo de atuação da cerâmica piezelétrica. O modo de atuação requer uma forma construtiva do elemento transdutor a qual será chamada de configuração do elemento.

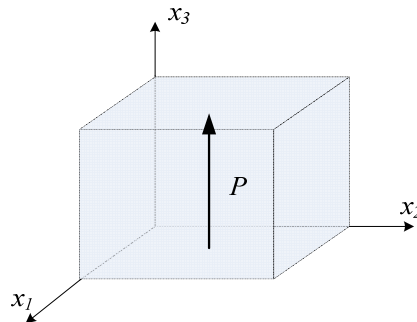


Figura 2.7: Sistema de coordenadas local do elemento piezelétrico.

A Figura 2.7 define um sistema de coordenadas ortotrópico local definido no elemento piezelétrico. É convencional que a polarização  $P$  do elemento esteja orientada paralelamente à direção  $x_3$  do sistema apresentado, podendo estar no mesmo sentido ou em sentido oposto.

Como exemplo neste trabalho, para os cristais pertencentes ao grupo cristalográfico tetragonal  $4mm$ , como é o caso do PZT, tem-se a matriz de coeficientes de acoplamento das cerâmicas piezelétricas na forma:

$$[d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{em que, } d_{32} = d_{31} \text{ e } d_{24} = d_{15}. \quad (2.14)$$

Os três modos de atuação identificados, relacionados à matriz (2.14) são: modo transversal ( $d_{31}$  e  $d_{32}$ ), modo paralelo ( $d_{33}$ ), e modo cisalhante ( $d_{15}$  ou  $d_{24}$ ). Os três modos indicados são detalhados na seqüência.

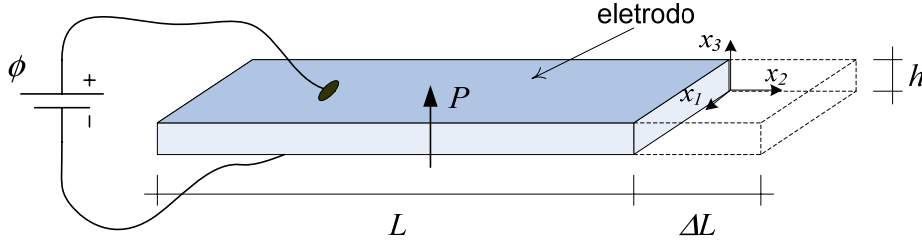


Figura 2.8: Modo de atuação transversal. Configuração laminar.

O modo transversal de atuação é obtido a partir de uma lâmina de piezoeletrico, denominado assim de configuração laminar (ver Figura 2.8). Nesta configuração, a espessura da lâmina na direção  $x_3$  é muito menor que as outras dimensões. As deformações predominantes ocorrem no plano perpendicular à direção de polarização, direções  $x_1$  e  $x_2$ . O alongamento da lâmina é aproximado por  $\Delta L = d_{31} \frac{\phi}{h}$ , em que  $h$  é a espessura da lâmina, e  $\phi$  o potencial elétrico aplicado.

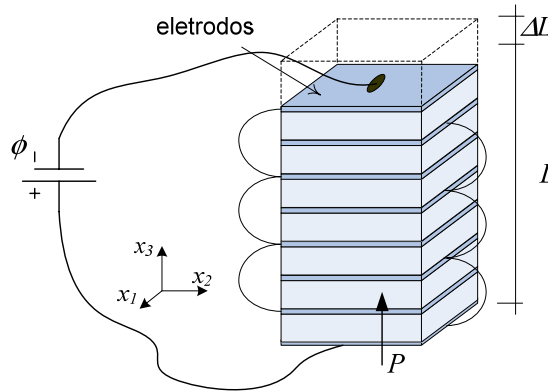


Figura 2.9: Modo de atuação paralelo. Configuração em pilha.

A configuração em pilha define o modo de atuação paralelo (ver Figura 2.9) e é constituída de discos de piezoeletricos empilhados na direção de polarização, direção  $x_3$ . Nesta configuração a deformação predominante tem a mesma direção do potencial elétrico e coincide com a direção de polarização. O alongamento depende do número de elementos na pilha e pode ser aproximado por  $\Delta L = d_{33} n \phi$ , em que  $n$  é o número de discos.

O terceiro modo de atuação, modo cisalhante, apresenta uma configuração em que o piezelétrico faz uso da propriedade de cisalhamento (ver Figura 2.10). Note que a direção de polarização  $x_3$  se encontra paralela ao plano da lâmina, e o potencial elétrico é medido/aplicado na direção perpendicular à direção de polarização. Os eletrodos, diferentemente das outras configurações, são fixados em faces paralelas à direção de polarização. O deslocamento obtido pode ser aproximado por  $\Delta = d_{15} \frac{\phi}{h} L$ .

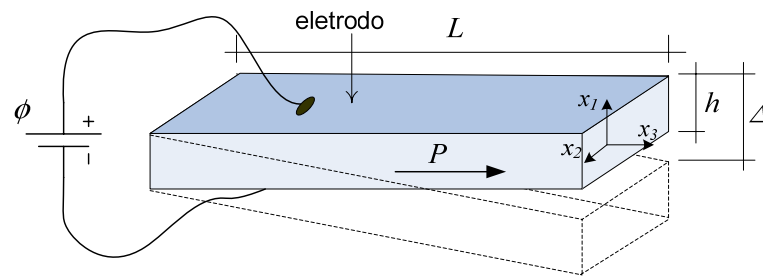


Figura 2.10: Modo de atuação cisalhante. Configuração cisalhante.

A partir dos três conceitos de atuação apresentados podem-se construir transdutores em qualquer formato que se utilize de um destes modos. O projeto construtivo dos transdutores pode ser feito em anel, placas, cilindros, etc. desde que se tenha em mente a propriedade relacionada ao modo de atuação. É possível, ainda, ser feita uma combinação dos modos para uma função determinada, como é o caso dos atuadores biformos que une duas lâminas piezelétricas promovendo a flambagem destas quando acionadas.

Neste trabalho, o modo de atuação empregado é o modo de atuação transversal aplicando a configuração laminar. Com as deformações planares desta configuração deseja-se atuar sobre as vibrações de uma placa.

## 2.5.2 Sensor

O sensor piezelétrico está dentro da classe de sensores ativos, isto, porque o sensor gera uma carga elétrica em função da unidade mensurada. Por sua vez, a carga gerada pode ser convertida em sinal de tensão ou de corrente. Pelo fato de o sensor piezelétrico ser um elemento ativo, não há necessidade de uma fonte de alimentação externa para seu funcionamento.

Contudo, apesar do sensor fornecer um sinal ativo que pode ser mensurado por um sistema de aquisição, muitas vezes é imprescindível o uso de um condicionador de sinal, especialmente no que diz respeito a medidas estáticas usando piezelétricos. Após o advento do amplificador de carga por Kistler na década de 50, o sensoriamento estático usando sen-

sores piezelétricos se tornou mais fácil. Com os amplificadores atuais é possível fazer medi-  
das estáticas usando piezelétrico por um longo período com um baixo erro.

Para se projetar, estudar ou determinar as características de um elemento sensor é importante conhecer o estímulo mecânico que age sobre ele e o modelo eletro-mecânico de resposta do elemento quando estimulado. Neste ponto interessa, sobretudo, conhecer as limitações, faixa de operação linear, sensibilidade, entre outras características do sensor. Um quesito importante em relação à limitação do sensor, no caso das vibrações mecânicas, refere-se à frequência de corte inferior, ou seja, a menor frequência que o sensor é capaz de ler e qual a atenuação do sinal nesta frequência.

Estas e outras considerações estão expostas a seguir. Em virtude de o conteúdo deste tópico ser bastante vinculado à área da engenharia elétrica, é possível que os profissionais da engenharia mecânica não estejam familiarizados com os temas versados, razão pela qual este serão apresentados de forma sucintos sem maiores aprofundamentos técnicos.

O sensor pode ser modelado eletronicamente de duas formas equivalentes: fonte de tensão com capacitor em série ou fonte de carga com capacitor em paralelo. Tradicionalmente, na literatura de eletrônica, usam-se unidades de tensão e de corrente para modelar e equacionar sistemas, o que pode ocasionar certa dificuldade na pesquisa de modelos de equacionamento para fonte de carga. Uma boa fonte literária para introdução a modelos de transdutores é Wilson (1991). Ambos os modelos elétricos são mostrados na Figura 2.11 com suas respectivas equações na sequência do texto.

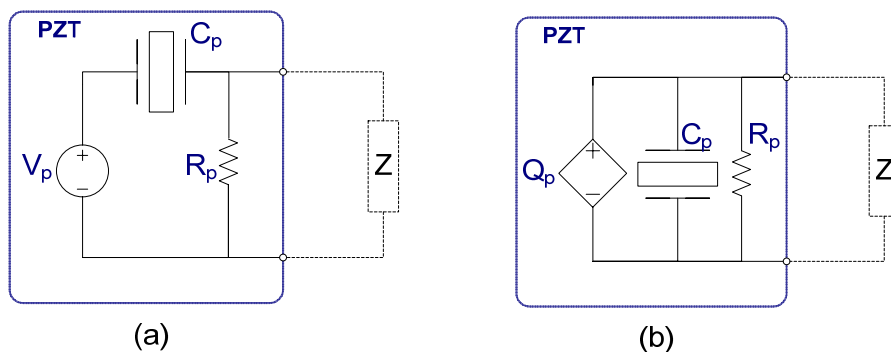


Figura 2.11: Modelo elétrico do sensor piezelétrico (a) como fonte de tensão, (b) como fonte de carga.

No caso da fonte de tensão as equações elétricas do modelo são dadas por:

$$\begin{aligned}
Q(t)_{carga} &= C_p V_p \left(1 - e^{-\frac{t}{ZC_p}}\right) \\
V(t)_{carga} &= V_p e^{-\frac{t}{ZC_p}} \\
I(t)_{carga} &= \frac{V_p}{Z} e^{-\frac{t}{ZC_p}}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

em que  $Q_{carga}$ ,  $V_{carga}$  e  $I_{carga}$  são respectivamente a carga elétrica, tensão elétrica e corrente elétrica no tempo  $t$  medidas sobre a carga de impedância  $Z$ . A capacitância do piezelétrico é  $C_p$  e a tensão inicial no piezelétrico provocado pelo estímulo mecânico é  $V_p$ .

Para o caso da fonte de carga as equações elétricas do modelo são dadas por:

$$\begin{aligned}
Q(t)_{carga} &= Q_p e^{-\frac{t}{ZC_p}} \\
V(t)_{carga} &= \frac{Q_p}{C_p} e^{-\frac{t}{ZC_p}} \\
I(t)_{carga} &= \frac{Q_p}{ZC_p} e^{-\frac{t}{ZC_p}}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

em que  $Q_p$  é a carga elétrica inicial provocada pelo estímulo mecânico.

Como resultado, ambos os modelos apresentam equações na forma de descarga de um capacitor, com valores iniciais dados pela equação constitutiva em função do estímulo mecânico induzido no sensor. A forma geral do gráfico para a carga elétrica em função do tempo é ilustrado na Figura 2.12, em que a impedância do sistema de medição é puramente resistiva ( $Z = R$ ).

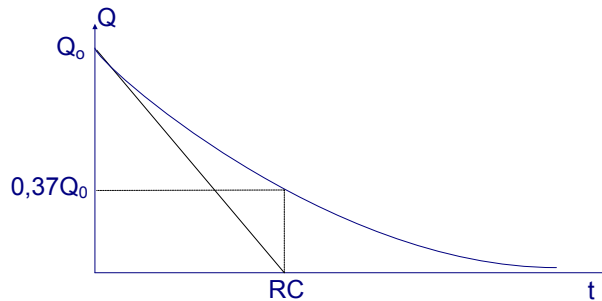


Figura 2.12: Curva de descarga típica para um sensor piezelétrico.

A constante de tempo definida no gráfico por  $RC$ , determina o tempo que o piezelétrico levaria para descarregar totalmente a partir de uma carga inicial  $Q_p$  a uma taxa cons-

tante. Entretanto no decaimento exponencial esta constante representa aproximadamente 37% do valor inicial.

Para medições contidas na faixa de  $0 < t < 0,1RC$ , a reta determinada pela constante de tempo é uma boa aproximação linear da curva de descarga do piezelétrico (GAUTSCHI, 2002). Dessa forma, é possível determinar o erro para um determinado tempo de medição. Por exemplo: para um erro máximo de 2%, o tempo de medição não deve ultrapassar  $0,02RC$ . Assim, para um tempo de medição de 100s, a constante de tempo deve ser no mínimo 5000s.

Nesta linha de raciocínio, a constante de tempo tem por característica limitar a frequência de corte inferior do circuito em medições dinâmicas. Somente com constantes de tempo infinitamente longas, a frequência de corte se aproxima de zero, tornando possíveis medições puramente estáticas. Isto depende, porém, de uma resistência infinitamente grande.

Para sistemas com oscilações senoidais a frequência de corte é dada por:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad (2.17)$$

Nesta frequência há uma atenuação em 3 dB na amplitude do sinal, representando os aproximados 37 % de queda em amplitude mencionada, além de uma mudança de fase em  $45^\circ$  entre o sinal de entrada e de saída. Em geral, essas características, atenuação e mudança de fase, não são aceitáveis para sistemas de controle, portanto, usualmente são realizadas medições de sinais com frequências de 5 a 10 vezes superior à frequência de corte (GAUTSCHI, 2002). A plotagem de um diagrama de Bode para o sistema ajuda a determinar essas características.

Assim, a frequência de corte, e conseqüentemente a frequência do sistema dinâmico capaz de ser controlado, depende da capacitância  $C$  e da resistência  $R$  do circuito elétrico.

A capacitância do circuito é dada pela capacitância do piezelétrico somada com a do cabo coaxial. Contudo, a capacitância do cabo depende diretamente de seu comprimento, que é da ordem de 70 pF/m – cerca de 300 vezes menor que a capacitância do piezelétrico. Sendo assim, para cabos curtos, a capacitância do conjunto é predominantemente dada pelo piezelétrico,  $C \approx C_p$ .

A resistência  $R$  é o segundo parâmetro que determina a frequência de corte. Enquanto que a capacitância é representada quase que unicamente pelo elemento sensor, a resistência está relacionada ao instrumento de aquisição do sinal: cabos, amplificadores e sistema de medição.

O sistema de medição está representado no modelo elétrico pela impedância  $Z$ . A parte resistiva desta impedância junto com a resistência interna do piezelétrico,  $R_p$ , determina a resistência  $R$  da constante de tempo.

Para o elemento piezelétrico,  $R_p$  é da ordem de  $100 \text{ T}\Omega$ . Como regra geral, a resistência de isolamento do sistema de medição na ordem de 1 a  $10 \text{ T}\Omega$  proporciona um limite em baixa frequência razoável para uma medida quase estática. Para medidas dinâmicas, resistências da ordem de  $10 \text{ G}\Omega$  já são suficientes. A Tabela 3, a seguir, dá uma idéia de valores de resistência para os componentes eletrônicos de medição.

Tabela 3 – Resistência elétrica para alguns sistemas de medição.

| <i>Componente</i>                  | <i>Resistência</i>         |
|------------------------------------|----------------------------|
| Multímetro                         | $< 1 \text{ M}\Omega$      |
| Osciloscópio                       | $< 50 \text{ M}\Omega$     |
| Placa de aquisição de dados        | $< 0,1 \text{ T}\Omega$    |
| Amplificadores operacionais comuns | $< 1 \text{ T}\Omega$      |
| Amplificadores de instrumentação   | 1 a $1000 \text{ T}\Omega$ |
| Cabos isolamento de PTFE           | $> 1000 \text{ T}\Omega$   |

Pela Tabela 3 é possível perceber que sistemas de medição comuns não satisfazem aos valores de resistência referidos anteriormente. No passado, componentes eletrônicos que satisfaziam a essa exigência eram de difícil obtenção, o que levou a considerar sistemas piezelétricos inaptos a medições quase-estáticas. Atualmente, com os amplificadores MOS-FET, J-FET e diodos Varicap, com alta impedância de entrada e baixa corrente de *leakage* (corrente de fuga) (BOYLESTAD e NASHELSKY, 1999), é possível realizar medições estáticas por um longo período de tempo com baixo erro, sobretudo após o advento do amplificador de carga na década de 50.

### 2.5.3 Atuador

A forma de ação de um atuador piezelétrico em uma estrutura consiste em induzir uma força proporcional à tensão elétrica aplicada nos eletrodos do transdutor. Um importante meio para se especificar um atuador piezelétrico consiste do gráfico de desempenho do atuador. Estes gráficos são obtidos a partir da equação constitutiva do material, sendo assim, independe da geometria do elemento transdutor. Um exemplo do gráfico de desempenho para um piezelétrico é mostrado no gráfico da Figura 2.13 a seguir.

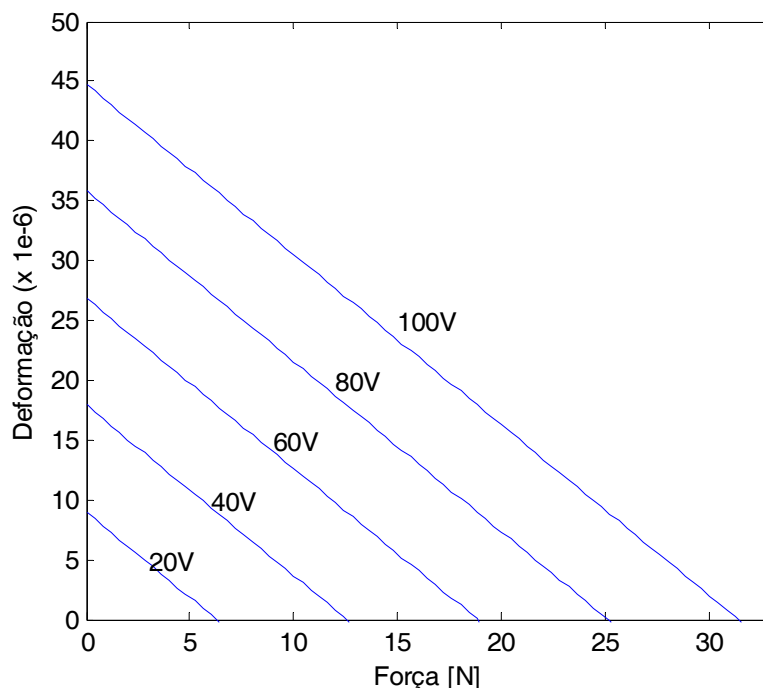


Figura 2.13: Gráfico de desempenho para um atuador piezelétrico.

O gráfico de desempenho mostra as linhas de isotensões (elétricas) para condições de contorno mecânico variável. Note que estas linhas, para o exemplo em questão, chegam a 100 Volts. Em alguns casos, o potencial elétrico aplicado no atuador piezelétrico pode chegar a mais de 1000 Volts de tensão, sendo limitado tão somente pela polarização elétrica e limite de ruptura do dielétrico. Apesar da elevada tensão elétrica a potência elétrica total do sistema é baixa – menos que 1 watt – devido ao baixo consumo de corrente.

De fato a corrente de consumo do atuador somente ocorre durante a variação de deformação. Isto torna o atuador piezelétrico extremamente eficiente por suportar cargas mecânicas elevadas a um baixíssimo consumo energético<sup>5</sup>.

Apesar da baixa potência elétrica requerida pelo atuador, um amplificador de potência para o acionamento do piezelétrico não é tão trivial de se projetar. O projeto deve levar em consideração a frequência de acionamento do atuador – em que a resistência de saída do amplificador é importante. Em especial circuitos de proteção para o amplificador devem ser devidamente projetados, pois o piezelétrico, como sistema capacitivo, é capaz de armazenar grande quantidade de energia, podendo descarregar uma tensão reversa destruindo o amplificador.

---

<sup>5</sup> O consumo do atuador piezelétrico para cargas estáticas se resume a corrente de *leakage* inversamente proporcional a sua resistência interna.



Das características geométricas do atuador, estas irão influenciar no desempenho do transdutor de duas formas. No quesito amplitude de deslocamento, quanto maior o comprimento do transdutor, maior será o deslocamento para uma mesma deformação e tensão elétrica aplicada. Quanto ao quesito força, este pode ser aumentado pelo acréscimo na área da seção transversal. Vale registrar que, aumentando a espessura do atuador para elevar a força, diminui-se a capacidade de deformação devido ao aumento da rigidez. Contudo, Sunar, Hyder e Yilbas (2001) mostram que o aumento na espessura apresenta melhor eficiência no controle de vibração que o aumento na largura do atuador.

Visto isto, a questão passa a ser a seguinte: qual a região de trabalho do atuador para o experimento proposto? Especificamente, qual será o potencial elétrico máximo aplicado? Para responder a estas questões é preciso olhar mais para o comportamento mecânico da estrutura. Em especial deve-se fazer uma aproximação da força e do deslocamento, a ser imposto pelo piezelétrico na estrutura, para contrapor um distúrbio mecânico.

Como exemplo, tem-se uma viga em balanço com um atuador piezelétrico colado na parte inferior e próximo ao engaste da viga (ver Figura 2.14). Submetida a uma força transversal na extremidade livre da viga, esta se deforma comprimindo a parte inferior e alongando a parte superior da viga. A compressão da superfície inferior é transmitida ao elemento piezelétrico resultando em uma compressão  $\Delta L$  deste elemento.

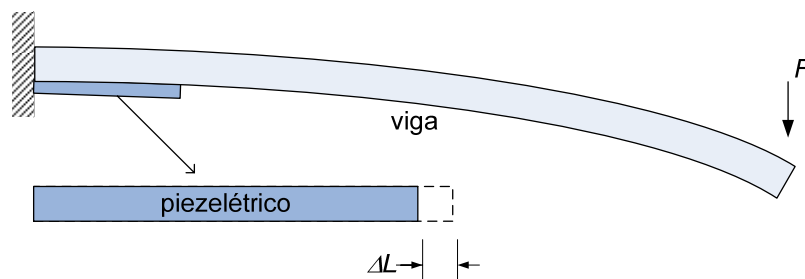


Figura 2.14: Deflexão da viga sob uma força. Detalhe do atuador piezelétrico

É de se imaginar que, como visto para o sensor, uma compressão do elemento gera uma diferença de potencial equivalente. Entretanto, estando o piezelétrico com um potencial elétrico prescrito, a deformação imposta pela viga ao piezelétrico é convertida em carga elétrica suprida pelo amplificador de potência, i.e. o excedente de carga elétrica é suprido pela fonte de corrente do amplificador, mantendo o potencial elétrico constante. O tempo de estabilização para este transiente depende da capacitância do sensor e da impedância de saída do amplificador. Dessa maneira, esta configuração deformada passa a ser o novo “zero” do atuador piezelétrico no que se refere à carga elétrica e à diferença de potencial.

Como exemplo de controle de deflexão da viga; deseja-se, por exemplo, recuperar esta deformação causada pela força transversal forçando a viga a retornar a sua posição

original. Dessa forma, o atuador precisa vencer a resistência da viga causada pela força de distúrbio  $F$ . Essa resistência é equivalente a uma mola de torção, relacionada ao momento fletor da viga na região do atuador, e causada pela força de distúrbio. O gráfico de momento para uma força concentrada na extremidade livre de uma viga engastada é ilustrado na Figura 2.15 abaixo:

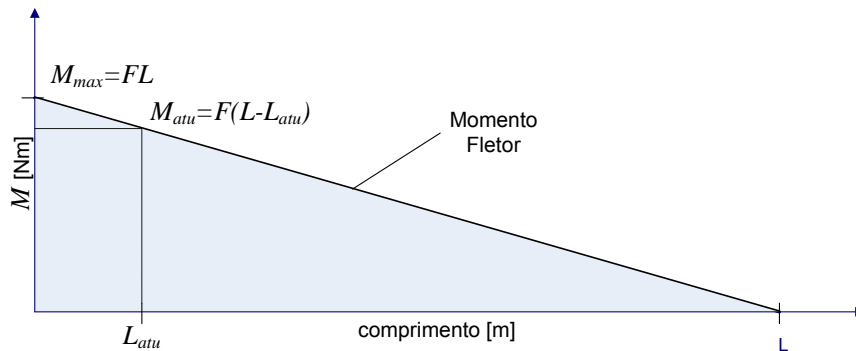


Figura 2.15: Gráfico de momento para uma viga sob uma carga transversal.

Deseja-se determinar a força  $P$  que o atuador deve gerar para contrapor o momento fletor no ponto em que o atuador age na viga. Objetiva-se, pois, anular o momento fletor na região do atuador. A Figura 2.16 a seguir mostra o diagrama de forças e momentos na região em que o atuador age.

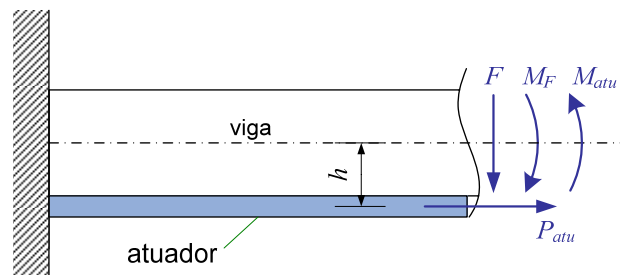


Figura 2.16: Diagrama de esforços na seção de corte do atuador piezelétrico.

Calculados estes valores é possível encontrar no mercado atuadores que satisfaçam os requisitos de projeto. Como resultado final plota-se a curva de operação do atuador no gráfico de desempenho em que é possível verificar a faixa de trabalho do transdutor sob condições de variação da carga.

Este capítulo foi dedicado a apresentação dos materiais piezelétricos, desde sua constituição física até as formas de utilização, dentro dos limites deste texto. Questões relativas à eletrostática, ao modelo elétrico e aos equipamentos elétricos envolvidos são abor-

dadas de forma sucinta visando uma melhor compreensão dos sistemas envolvidos. Objetivava-se que tal conhecimento facilite a modelagem matemática e definição dos conceitos e variáveis piezelétricas. Com relação ao modelo matemático, foi apresentado um resumo dos principais trabalhos concernentes à piezeletricidade e ao método dos elementos finitos constantes na literatura e usados como referência nesta dissertação. As formulações matemáticas e a modelagem do sistema serão apresentadas no capítulo seguinte com todo rigor e formalismo.



## CAPÍTULO 3

### MODELAGEM MATEMÁTICA EM MECÂNICA DOS SÓLIDOS E PIEZELETRICIDADE

#### 3.1 Equações Cinemáticas

##### 3.1.1 Elasticidade 3D

Seja uma partícula  $P \in \Omega_o$  definida na configuração de referência do domínio  $\Omega_o$ , mostrado na Figura 3.1. A partícula é localizada em relação à base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  pelo vetor  $\vec{X}$ . Sendo o corpo representado pelo domínio  $\Omega_o$  sujeito a uma deformação, este passa a ocupar uma configuração atual  $\Omega_t$ . O ponto  $P$  pode ser mapeado no ponto  $P' \in \Omega_t$  pela função de deformação  $\vec{x} = x(\vec{X})$ .

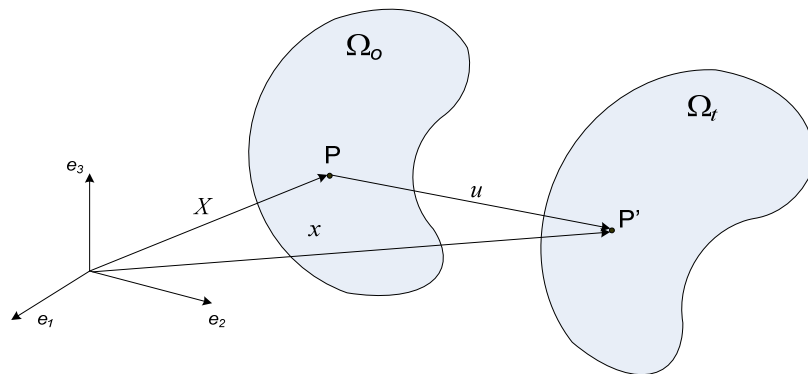


Figura 3.1: Deformação de um ponto no domínio de um corpo arbitrário.

É possível definir a função deslocamento da partícula em função do vetor de posição inicial  $\vec{X}$  da partícula  $P$  por:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{x} - \vec{X} \\ u(\vec{X}) &= x(\vec{X}) - \vec{X} \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que  $\vec{u}$  é definido em termos das componentes  $\vec{u} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{e}_3$ .

Uma fibra de material definida pelos pontos  $P$  e  $Q$  na configuração inicial é mostrada na Figura 3.2 a seguir.

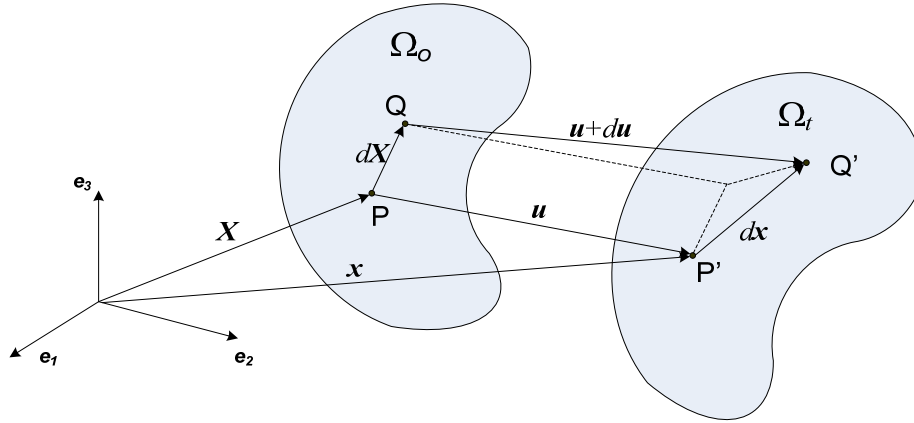


Figura 3.2: Deformação de uma fibra definida por  $\overline{PQ}$  no domínio de um corpo arbitrário.

Para as partículas  $P'$  e  $Q'$  na configuração deformada têm-se as medidas de deformação,

$$\vec{x} = \mathbf{x}(\vec{X}) \quad (3.2)$$

$$\vec{x} + d\vec{x} = \mathbf{x}(\vec{X} + d\vec{X}) \quad (3.3)$$

Supondo que a função deformação  $\mathbf{x}(\cdot)$  seja suave, pode-se expandir a Eq. (3.3) em série de Taylor truncada obtendo, na notação indicial:

$$x_i + dx_i = x_i(\vec{X}) + \frac{\partial x_i(\vec{X})}{\partial X_j} dX_j \quad (3.4)$$

em que na notação utilizada, somam-se os índices repetidos – a menos que seja negado explicitamente. Na Eq. (3.4) os termos de ordem superior foram negligenciados. Subtraindo (3.2) de (3.4) obtém-se:

$$dx_i = \frac{\partial x_i(\vec{X})}{\partial X_j} dX_j \quad (3.5)$$

a qual pode ser escrita de forma compacta como:

$$d\vec{x} = \mathbf{F}d\vec{X} \quad (3.6)$$

em que,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i(\vec{X})}{\partial X_j} = \nabla_x \vec{x} \quad (3.7)$$

denota o gradiente da função deformação.

É possível também definir o gradiente da função deformação em termos da função deslocamento. Para isto toma-se o gradiente do campo de deslocamento definido em (3.1) e, substituindo  $\mathbf{F}$  obtido em (3.7), chega-se a:

$$\mathbf{F} = \nabla_x \vec{u} + \mathbf{I} \quad (3.8)$$

em que  $\mathbf{I}$  representa o tensor identidade.

Contudo é necessário observar que o gradiente da função deformação contém em si o movimento de corpo rígido de rotação e, portanto, não pode ser prontamente usado como medida de deformação/estiramento puro. Para este fim, é necessário definir uma nova medida de deformação resultante da variação do quadrado do comprimento de arco de uma fibra material (MARINHO, 2007; HOLLISTER, [200-]). Como resultado é obtida uma medida de deformação conhecida por tensor de Green-Lagrange  $\mathbf{E}(\vec{X})$ , o qual é definido na configuração de referência  $\Omega_0$  por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (3.9)$$

Substituindo (3.8) e resolvendo chega-se a:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla_x \vec{u} + [\nabla_x \vec{u}]^T + [\nabla_x \vec{u}]^T [\nabla_x \vec{u}]) \quad (3.10)$$

Para sistemas de pequenas deformações e pequenos deslocamentos a parcela não linear do tensor de Green-Lagrange é desprezível em relação às parcelas lineares, chegando-se finalmente a:

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{2}(\nabla_x \vec{u} + [\nabla_x \vec{u}]^T) \equiv \varepsilon \quad (3.11)$$

Assim fica definido o tensor de deformação infinitesimal,  $\varepsilon$ , usualmente conhecido na engenharia em se tratando de pequenas deformações lineares. Operando a Eq. (3.11), o tensor de deformação infinitesimal é escrito como:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

No tensor acima foi utilizada uma notação mais usual, definida por:

$$\vec{u} = \{u, v, w\} \quad \text{e} \quad \vec{X} = \{x, y, z\} \quad (3.13)$$

Fazendo a análise do tensor de deformações têm-se na diagonal principal as deformações normais do elemento material. Os triângulos superior e inferior, simétricos, representam a distorção do elemento devido às deformações cisalhantes. Seja o ângulo total de distorção definido por  $\gamma = 2\varepsilon$ , em que  $\gamma$  é a chamada deformação cisalhante de engenharia. Assim o tensor deformação infinitesimal pode ser escrito como:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Dado a simetria do tensor é possível reduzir a ordem da matriz escrevendo-a de forma vetorial como segue.

$$\vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ v_{,z} + w_{,y} \\ u_{,z} + w_{,x} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

em que a vírgula denota a derivada em relação à variável subsequente.



### 3.1.2 Placa 2D: Hipótese Cinemática de *Reissner-Mindlin*

Seja uma estrutura, representada na Figura 3.3, em que uma de suas dimensões é muito menor quando comparada às outras. Esta estrutura pode, então, ser considerada uma placa e é representada pelo plano médio definido pela metade da espessura da placa.

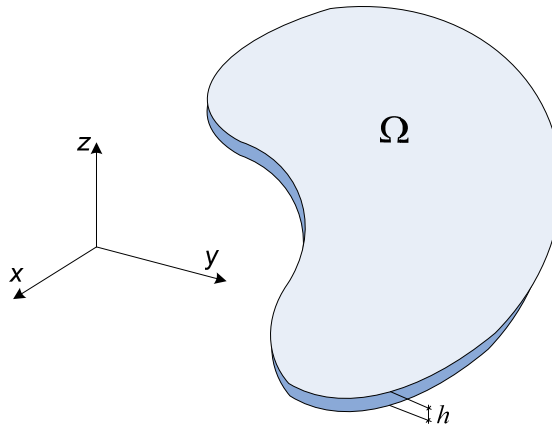


Figura 3.3: Domínio estrutural de uma placa.

*Reissner* e *Mindlin* desenvolveram uma hipótese cinemática para placas com o objetivo de reduzir o problema da elasticidade 3D para um sistema 2D. Em relação à teoria clássica de Kirchhoff, a hipótese de *Reissner-Mindlin* considera os efeitos das deformações de cisalhamento transversal. Esta hipótese pode ser escrita como:

*Seja um corte plano e normal à linha da superfície média de uma placa antes da solicitação. Após a deformação este corte permanece plano, mas não mais perpendicular à linha tangente ao plano médio da placa deformada.*

A rotação da fibra normal à superfície média possibilita incluir os efeitos de cisalhamento transversal da placa, o que torna esta hipótese adequada para representar placas finas e semi-espessas, além de aproximar melhor o comportamento dinâmico estrutural. Outra consideração a ser feita, que também está presente na teoria clássica, é que, por tratar-se de uma placa em que a espessura é muito menor que as outras dimensões, a tensão normal transversal é desprezível se comparada às demais tensões, isto implica em  $\sigma_{zz} \approx 0$ . Graficamente, esta hipótese pode ser representada pela Figura 3.4.

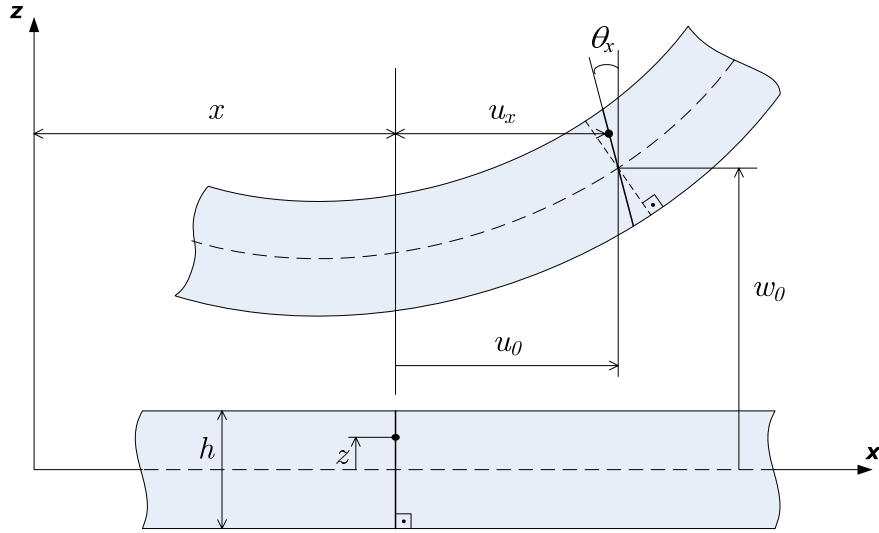


Figura 3.4: Hipótese cinemática de Reissner-Mindlin para uma placa deformada.

Para o plano  $yz$  tem-se uma figura análoga ao exposto graficamente na Figura 3.4. Do ponto de vista matemático, observando a figura acima, o campo de deslocamento para a placa baseada na hipótese de Reissner-Mindlin é aproximado por:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ u_y(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\theta_y(x, y) \\ u_z(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (3.16)$$

em que  $u_0$  e  $v_0$  estão relacionados ao comportamento de membrana devido ao carregamento axial no plano da placa, enquanto que  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são relacionados ao carregamento transversal. Em se tratando da elasticidade linear para pequenas deformações e deslocamentos, estes efeitos podem ser desacoplados, tratados separadamente e por fim adicionados por superposição.

Assim, o gradiente do campo de deslocamentos (3.16), é obtido:

$$\nabla \bar{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} & \frac{\partial u_0}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} & -\theta_x \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} & \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} & -\theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

E o tensor de deformação infinitesimal obtido pela Eq. (3.11) é escrito:

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} \left( [\nabla \vec{u}] + [\nabla \vec{u}]^T \right) \quad (3.18)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Donde se podem definir os termos de deformação, na Eq. (3.18), de forma a ser possível identificar as parcelas de deformação resultantes dos esforços de membrana, flexão e cisalhamento transverso, fornecendo:

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} \left( [\nabla \vec{u}] + [\nabla \vec{u}]^T \right) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 + z\kappa_{xx} & \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx}^0 + z\kappa_{yx} & \varepsilon_{yy}^0 + z\kappa_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

em que  $\gamma = 2\varepsilon$ .

Devido à simetria do tensor de deformação infinitesimal, é possível reduzir a ordem do tensor escrevendo-o na forma vetorial:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \vec{\varepsilon}_0 + z\vec{\kappa} \\ \vec{\gamma}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 + z\kappa_{xx} \\ \varepsilon_{yy}^0 + z\kappa_{yy} \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Os termos apresentados nas Eqs. (3.19) e (3.20) são:  $\vec{\varepsilon}_0$  representando as deformações devido ao esforço de membrana,  $z\vec{\kappa}$  sendo as deformações devido aos esforços de flexão, sendo  $\vec{\kappa}$  as curvaturas e  $\vec{\gamma}_c$  as deformações devido ao cisalhamento transverso. Comparando (3.19) com (3.18) pode-se identificar as seguintes relações:

$$\vec{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\vec{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta_{x,x} \\ -\theta_{y,y} \\ -\theta_{x,y} - \theta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\vec{\gamma}_c = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,y} - \theta_{y,x} \\ w_{,x} - \theta_{x,y} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Nas Seções 3.1.1e 3.1.2 foram vistas as formulações para o comportamento cinemático da elasticidade 3D e a hipótese reduzida para o comportamento de placa de primeira ordem, chamada de placa de Mindlin. A seguir serão tratadas as formulações cinemáticas para uma partícula de carga elétrica, primeiro sob o ponto de vista de um corpo sólido 3D; em seguida uma hipótese simplificadora para placas em duas dimensões.

### 3.1.3 Eletrostática 3D

Na seção anterior foram definidas as equações cinemáticas que exprimem a relação entre a deformação mecânica  $\vec{\varepsilon}$  e o deslocamento  $\vec{u}$  de uma partícula sólida. Seguindo este mesmo raciocínio, é desejável determinar a relação entre o campo elétrico  $\vec{E}$  e a diferença de potencial elétrico  $\phi$  de uma partícula acerca de um sólido polarizado.

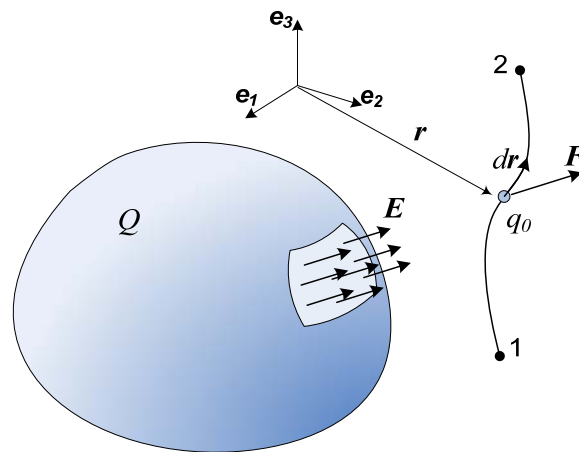


Figura 3.5: Trabalho de um campo elétrico sobre uma carga de prova.

Um corpo sólido carregado com uma quantidade de cargas  $Q = \int_{\Omega} \rho dV$  é mostrado na Figura 3.5. O campo elétrico é denominado como a força de ação destas cargas sobre uma carga de prova  $q_0$  no exterior deste sólido,

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \quad (3.24)$$

Isto é semelhante à força de corpo dado pelo campo gravitacional. Se a carga de prova for deslocada de um ponto 1 a um ponto 2, o trabalho realizado por um campo de força conservativo é:

$$W_c^{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.25)$$

O trabalho realizado por um campo conservativo é o negativo da variação de energia potencial:

$$dW_c = -d\mathcal{U} = -\nabla \mathcal{U} \cdot d\vec{r} \quad (3.26)$$

A energia potencial por unidade de carga é definida como diferença de potencial elétrico  $\phi$ , expresso em volts, e é escrita como:

$$\phi = \frac{\mathcal{U}}{q_0} \quad (3.27)$$

De posse das equações (3.24) à (3.27), operando e substituindo adequadamente, finalmente, obtém-se:

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (3.28)$$

### 3.1.4 Placa 2D: Hipótese de Campo e Potencial Elétrico

Uma lâmina de piezelétrico coberta com eletrodos nas faces perpendiculares à direção de polarização e, perfeitamente colada na superfície superior de uma placa é mostrada na Figura 3.6 abaixo.

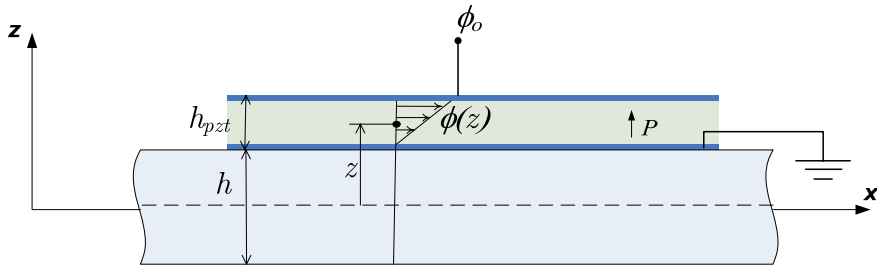


Figura 3.6: Distribuição do potencial elétrico em uma lâmina de piezelétrico.

Estando os dois eletrodos da lâmina piezelétrica com uma diferença de potencial elétrico, e considerando que o eletrodo em contato com a estrutura esteja perfeitamente aterrado assegurando um potencial nulo, e ainda que o eletrodo livre apresente um potencial prescrito  $\phi_o$ , é assumido como hipótese que a distribuição de potencial ao longo da espessura do piezelétrico seja linear, i.e.:

$$\phi(z) = \frac{z - h/2}{h_{pzt}} \phi_o \quad (3.29)$$

Outra consideração importante se refere ao potencial elétrico constante no plano da placa i.e.,  $\phi(x, y, z) = \phi(z)$ . Em verdade, o campo elétrico  $\vec{E}$  nos arredores da borda da placa sofre uma distorção. Entretanto, para superfícies paralelas com uma distância muito pequena entre elas, como é o caso, é adequado usar a hipótese de plano “infinito” de cargas, resultando em um campo elétrico constante no plano da placa.

Usando a hipótese definida na Eq. (3.29), pode-se calcular o campo elétrico para lâmina piezelétrica pela Eq. (3.28), como segue,

$$\vec{E} = \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \phi(z) \quad (3.30)$$

em que o único resultado é:

$$E_3 = - \frac{\phi_o}{h_{pzt}} \quad (3.31)$$

Conclui-se então que a configuração laminar apresenta um único campo elétrico constante gerado/aplicado a partir de um potencial elétrico  $\phi_o$  na face da lâmina, o qual é paralelo à direção de polarização.

Com isto concluem-se as relações cinemáticas, tanto no que tange ao comportamento mecânico quanto ao eletrostático. As formulações apresentadas para a placa 2D serão usadas posteriormente na formulação do funcional a partir do qual serão obtidas as equação dinâmica para um corpo/meio sujeito a carregamentos eletro-mecânico. Antes, contudo, faz-se necessário introduzir das relações constitutivas do material.

### 3.2 Relações Constitutivas

#### 3.2.1 Piezeletricidade 3D

O efeito do acoplamento eletro-mecânico induz a equações constitutivas em que as equações da elasticidade linear são relacionadas à equação de carga da eletrostática através de constantes piezelétricas.

Usando os princípios da termodinâmica, em específico o balanço de energia (primeira lei da termodinâmica) e a taxa de variação de entalpia (segunda lei da termodinâmica), chega-se à forma geral das equações constitutivas termo-piezelétricas de um meio contínuo, conforme encontrado em Piefort (2001) e Ahmad *et al.* (2006). Simplificando as parcelas térmicas, as equações constitutivas da piezeletricidade na forma tensorial são escritas como:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k \quad (3.32)$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik}^S E_k \quad (3.33)$$

Nas equações acima,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $D$  e  $E$ , são respectivamente os tensores de tensão mecânica, deformação mecânica, deslocamento elétrico de cargas e campo elétrico. As propriedades constitutivas  $c^E$ ,  $e$  e  $\epsilon^S$  são os tensores, de elasticidade, de constantes piezelétricas, e permissividade dielétrica, respectivamente. Os sobrescritos  $(\cdot)^E$  e  $(\cdot)^S$  denominam propriedades, a campo elétrico constante e à deformação constante, respectivamente.

Em Piefort (2001) estas propriedades são definidas pela termodinâmica na forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= c_{ijkl}^E & \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E_k} &= e_{ijk} \\
\frac{\partial D_i}{\partial \varepsilon_{kl}} &= e_{ikl} & \frac{\partial D_i}{\partial E_k} &= \epsilon_{ik}^S
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Em decorrência da simetria dos tensores mecânicos, é possível reduzir a ordem tensorial destas equações. Sendo assim, torna-se possível re-escrever as equações constitutivas do material piezelétrico de forma mais compacta:

$$\begin{aligned}
\sigma_p &= c_{pq}^E \varepsilon_q - e_{kp} E_k \\
D_i &= e_{iq} \varepsilon_q + \epsilon_{ik}^S E_k
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Escrevendo as equações (3.35) na forma matricial, tem-se:

- Forma (  $\sigma - D$  ):

$$\begin{aligned}
\{\sigma\} &= [c^E] \{\varepsilon\} - [e]^T \{E\} \\
\{D\} &= [e] \{\varepsilon\} + [\epsilon^S] \{E\}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Outros formatos também usados destas equações são (PIEFORT, 2001; SETTER, 2002),

- Forma (  $\varepsilon - D$  ):

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon\} &= [s^E] \{\sigma\} + [d]^T \{E\} \\
\{D\} &= [d] \{\sigma\} + [\epsilon^T] \{E\}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

- Forma (  $\varepsilon - E$  ):

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon\} &= [s^D] \{\sigma\} + [g]^T \{D\} \\
\{E\} &= -[g] \{\sigma\} + [\beta^T] \{D\}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

- Forma (  $\sigma - E$  ):

$$\begin{aligned}
\{\sigma\} &= [c^D] \{\varepsilon\} - [h]^T \{D\} \\
\{E\} &= -[h] \{\varepsilon\} + [\beta^S] \{D\}
\end{aligned} \tag{3.39}$$



em que  $[c]$  e  $[s]$  são as matrizes de elasticidade e rigidez;  $[\epsilon]$  e  $[\beta]$  são as matrizes de constantes dielétricas; e  $[e]$ ,  $[d]$ ,  $[g]$  e  $[h]$  e são matrizes de constantes piezelétricas. Os sobrescritos  $(\bullet)^E$ ,  $(\bullet)^D$ ,  $(\bullet)^T$  e  $(\bullet)^S$  determinam as propriedades a campo elétrico constante, deslocamento elétrico constante, tensão mecânica constante e a deformação constante. São válidas as seguintes relações entre as matrizes de propriedade do material:

$$\begin{cases} [c^E][s^E] = [c^D][s^D] = \mathbf{I} \\ [\beta^S][\epsilon^S] = [\beta^T][\epsilon^T] = \mathbf{I} \end{cases} \quad (3.40)$$

$$\begin{cases} [c^D] = [c^E] + [e]^T [h] \\ [s^D] = [s^E] - [d]^T [g] \\ [\epsilon^T] = [\epsilon^S] + [d]^T [e] \\ [\beta^S] = [\beta^T] + [d]^T [e] \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} [e] = [d][c^E] \\ [d] = [\epsilon^T][g] \\ [g] = [h][s^T] \\ [h] = [\beta^S][e] \end{cases} \quad (3.42)$$

As matrizes de propriedades do material piezelétrico possuem apenas alguns elementos não zeros. A disposição dos elementos não zeros depende fundamentalmente do material, tipo de cristal e cerâmica, de acordo com a classificação cristalográfica apresentada na Seção 2.3.3. Uma tabela completa para as classes cristalográficas dos materiais Piezelétricos é apresentada na normatização IEEE (1988) 176-1987, *Standard on Piezoelectricity*. Outras fontes para tabelas cristalográficas em piezeletricidade são: Cady (1946) e Nye (1957).

No caso desta dissertação, os sensores e atuadores são baseados no sistema cristalográfico tetragonal classe  $4mm$ . Este é o caso para uma variedade de cerâmicas piezelétricas, incluindo os PZT-5A e PZT-5H. As matrizes de propriedades do material de acordo com esta classe de simetria são mostradas a seguir.

A matriz de elasticidade piezelétrica,  $[c^E]$ , tem a forma:

$$[c^E] = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

As matrizes de constantes piezelétricas são:

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

e

$$[d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

e, finalmente, a matriz de permissividade dielétrica é

$$[\epsilon^S] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

em que nota-se um comportamento transversalmente isotrópico da cerâmica piezelétrica, i.e.  $c_{23}^E = c_{13}^E$ ,  $c_{22}^E = c_{11}^E$ ,  $c_{44}^E = c_{55}^E$ ,  $e_{31} = e_{32}$ ,  $e_{15} = e_{24}$  e  $\epsilon_{11}^S = \epsilon_{22}^S$ , para a classe de simetria apresentada do PZT.

A forma matricial da equação constitutiva 3D para o material piezelétrico da classe  $4mm$  tem a forma:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Para o caso especial do arranjo molecular hexagonal classe  $6mm$  tem-se que  $c_{66}^E = \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)$  na equação (3.47).

### 3.2.2 Placa 2D: Lâmina Piezelétricas

Seja uma placa de material piezelétrico em que a espessura  $h$  da placa é fina o suficiente para ser considerado que a tensão na direção normal a placa é desprezível se comparado as demais tensões, assim impõe-se que:

$$\sigma_{33} \approx 0 \tag{3.48}$$

Inserindo esta condição na relação constitutiva 3D dada pela eq. (3.47) tem-se, da primeira equação:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{23}^E & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

A partir da linha correspondente à tensão mecânica nula,  $\sigma_{33} = 0$ , pode-se determinar a influência das deformações transversais na espessura da placa. Desta forma, a relação para  $\varepsilon_{33}$  é obtida,

$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{c_{33}^E} \left( c_{13}^E \varepsilon_{11} + c_{23}^E \varepsilon_{22} \right) + \frac{e_{33}}{c_{33}^E} E_3 \quad (3.50)$$

Com o objetivo de reduzir o grau da matriz constitutiva reescreve-se a parcela relativa à  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{22}$  da equação (3.49):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E \\ c_{12}^E & c_{22}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{13}^E \\ c_{23}^E \end{bmatrix} \varepsilon_3 - \begin{bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \end{bmatrix} E_3 \quad (3.51)$$

em que, substituindo (3.50) em (3.51) e seguindo uma álgebra direta chega-se às matrizes constitutivas equivalentes para placas (BENJEDDOU, DEU e LETOMBE, 2002):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{c}_{11} & \hat{c}_{12} \\ \hat{c}_{12} & \hat{c}_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E \\ c_{12}^E & c_{22}^E \end{bmatrix} - \frac{1}{c_{33}^E} \begin{bmatrix} c_{13}^E \\ c_{23}^E \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_{13}^E \\ c_{23}^E \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{e}_{31} \\ \hat{e}_{32} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \end{bmatrix} - \frac{e_{33}}{c_{33}^E} \begin{bmatrix} c_{13}^E \\ c_{23}^E \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Da mesma forma, tem-se para  $D_3$ , da segunda equação da relação (3.47) a equação:

$$D_3 = \begin{bmatrix} e_{31} & e_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{33} \end{bmatrix} \varepsilon_{33} + \begin{bmatrix} \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} E_3 \quad (3.53)$$

Novamente, substituindo (3.50) em (3.53), chega-se a:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{e}_{31} & \hat{e}_{32} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e_{31} & e_{32} \end{bmatrix} - \frac{e_{33}}{c_{33}^E} \begin{bmatrix} c_{13}^E & c_{23}^E \end{bmatrix} \\ \hat{\epsilon}_{33} &= \epsilon_{33}^S + \frac{e_{33}}{c_{33}^E} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Assim, a equação constitutiva 2D para placas finas e semi-espessas pode ser expressa na forma a seguir:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{c}_{11} & \hat{c}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{c}_{12} & \hat{c}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{c}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{e}_{31} \\ 0 & 0 & \hat{e}_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ \hat{e}_{31} & \hat{e}_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\epsilon}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Note que a tensão cisalhante  $\sigma_{12}$  tomou o lugar da tensão normal  $\sigma_{33}$ , reorganizando a equação e eliminando o termo da tensão normal transversa. Dos termos constitutivos tem-se  $\hat{c}_{33} = c_{66}^E$  e os demais termos com circunflexo denotam coeficientes constitutivos corrigidos pelas equações (3.52) e (3.54).

### 3.2.3 Placa Sanduíche: Carregamento Generalizado

Seja uma estrutura composta de duas lâminas piezelétricas separadas por um material estrutural no meio, conforme a Figura 3.7. As lâminas de piezelétrico são coladas na superfície da placa estrutural por epóxi ou resina.

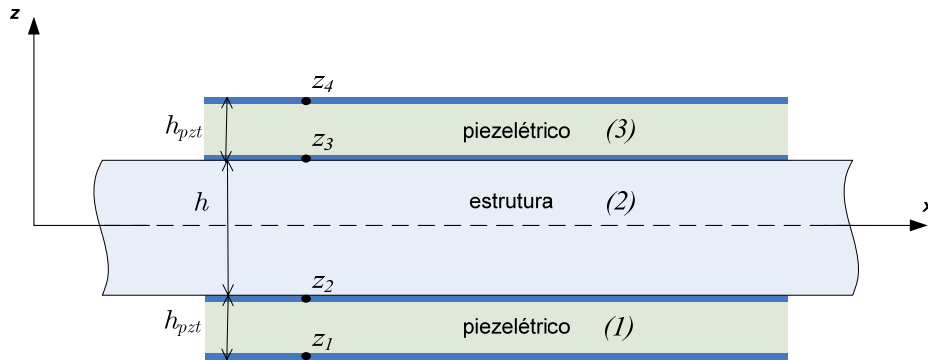


Figura 3.7: Placa sanduíche de piezelétrico.

Na estrutura sanduíche mostrada na figura acima são feitas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- O material viscoelástico da cola e os eletrodos do piezelétrico possuem espessura desprezível, e suas propriedades não são levadas em consideração.

- As lâminas estão perfeitamente coladas, de tal maneira que não ocorre deslizamento relativo entre elas, proporcionando uma deformação contínua do laminado sanduíche.
- As tensões normais mecânicas são contínuas na lâmina, porém, ocorre uma descontinuidade entre as laminas, sendo descontínua no laminado sanduíche.

As duas últimas hipóteses são representadas graficamente pela Figura 3.8. A flexão causada por um momento  $M$  aplicado na placa causa uma tensão descontínua no laminado, representado na  $k$ -ésima lâmina por  $\sigma^{(k)}$ .

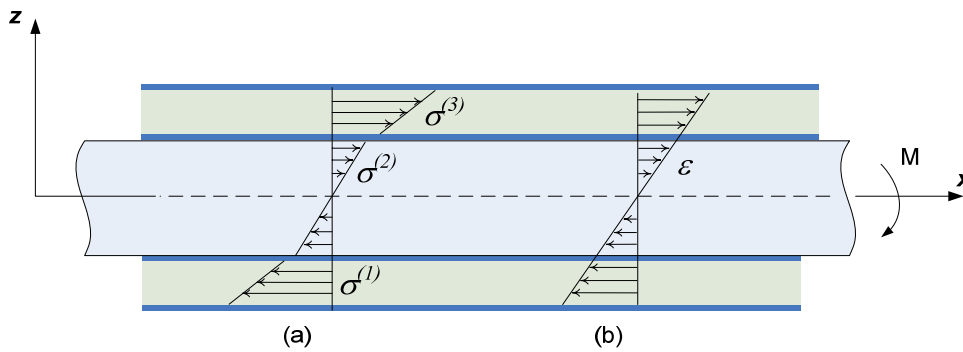


Figura 3.8: Diagrama de flexão da placa sanduíche (a) tensões descontínuas e (b) deformações contínuas.

Em virtude do exposto, torna-se necessário definir um vetor de carregamento generalizado,  $\vec{C}_g$ , cuja característica é a integração das tensões na espessura do laminado sanduíche. A Figura 3.9 mostra um laminado sanduíche com seus carregamentos nas faces expostas. O vetor de carregamento generalizado,  $\vec{C}_g = \{\vec{N}, \vec{M}, \vec{Q}\}^T$ , é dividido em: carregamento de membrana  $\vec{N} = \{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}\}$ , carregamento de flexão  $\vec{M} = \{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\}$  e carregamento transversal  $\vec{Q} = \{Q_{xz}, Q_{yz}\}$ , e são definidos por unidade de largura do sanduíche.

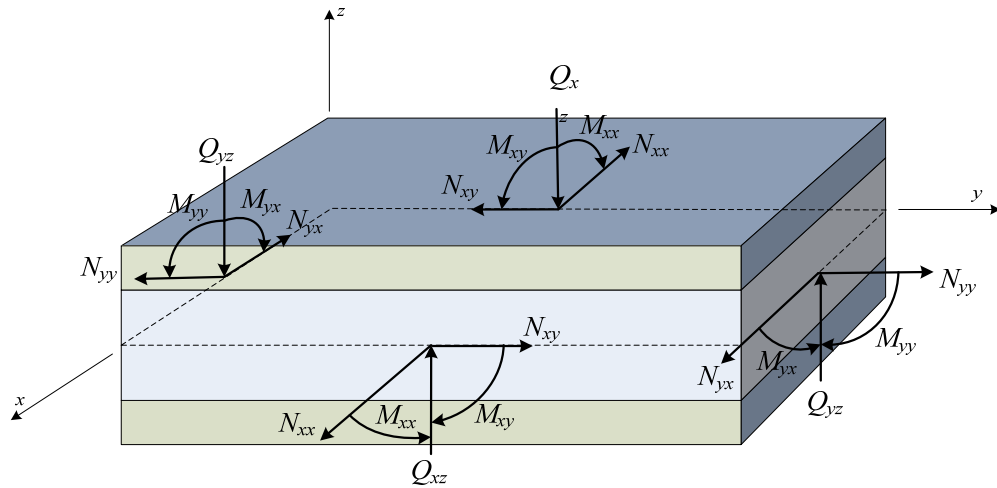


Figura 3.9: Diagrama de carregamentos generalizados em um laminado sanduíche.

Os carregamentos podem ser escritos como a integral das tensões correspondentes, na espessura da placa laminada que, a saber, são descontínuas em cada lâmina. Assim pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \vec{N} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz, & \vec{M} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \\ \vec{Q} = \begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz \end{aligned} \quad (3.56)$$

As definições expostas em (3.56) são usadas na sequência para expressar a equação constitutiva em termos do carregamento generalizado para o laminado e posteriormente na determinação da equação de equilíbrio do laminado.

### 3.2.4 Placa Sanduíche: Equação Constitutiva Generalizada

A equação constitutiva dada por (3.55) é reescrita aqui para a  $k$ -ésima lâmina devido à hipótese de descontinuidade das tensões:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} \hat{c}_{11} & \hat{c}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{c}_{12} & \hat{c}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{c}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{e}_{31} \\ 0 & 0 & \hat{e}_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^{(k)} \\
\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ \hat{e}_{31} & \hat{e}_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & \hat{e}_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^{(k)}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Agrupando os blocos em termos dos esforços no plano da lâmina e dos esforços cisalhantes transversos, podem-se escrever as relações em (3.57) de forma compacta:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_p \\ \bar{\sigma}_c \end{Bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} [\bar{C}_p] & [0] \\ [0] & [\bar{C}_c] \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_0 + z\bar{\kappa} \\ \bar{\gamma}_c \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [\bar{e}_p] \\ [\bar{e}_c] \end{bmatrix}^{(k)} \bar{E}^{(k)} \\
\bar{D}^{(k)} &= \begin{bmatrix} [\bar{e}_p] & [\bar{e}_c] \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_0 + z\bar{\kappa} \\ \bar{\gamma}_c \end{Bmatrix} + [\bar{\epsilon}]^{(k)} \bar{E}^{(k)}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

em que o subscrito  $p$  denomina tensões, deformações e propriedades no plano da placa (membrana e flexão), e o subscrito  $c$  refere-se às tensões, deformações e propriedades de cisalhamento transversos.

Na equação matricial acima, pode-se trabalhar separadamente as tensões planares e as tensões cisalhantes. Assim, as equações das tensões no plano da placa e a equação das tensões cisalhantes transversas são:

$$\bar{\sigma}_p^{(k)} = [\bar{C}_p]^{(k)} \bar{\varepsilon}_0 + z[\bar{C}_p]^{(k)} \bar{\kappa} - [\bar{e}_p]^{(k)} \bar{E}^{(k)} \tag{3.59}$$

$$\bar{\sigma}_c^{(k)} = [\bar{C}_c]^{(k)} \bar{\gamma}_c - [\bar{e}_c]^{(k)} \bar{E}^{(k)} \tag{3.60}$$

Retomando os conceitos de esforços generalizados definidos pelas equações em (3.56) e expandindo em termos da  $k$ -ésima lâmina:



$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{\sigma}_p dz = \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \vec{\sigma}_p^{(k)} dz \\
\vec{M} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{\sigma}_p z dz = \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \vec{\sigma}_p^{(k)} z dz \\
\vec{Q} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{\sigma}_c dz = \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \vec{\sigma}_c^{(k)} dz
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Substituindo as equações (3.59) e (3.60) em (3.61) e integrando na espessura do laminado, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left( [\bar{C}_p]^{(k)} \vec{\varepsilon}_0 + z [\bar{C}_p]^{(k)} \vec{\kappa} - [\bar{e}_p]^{(k)} \vec{E}^{(k)} \right) dz = \\
&= \left( \sum_{k=1}^3 (z_{k+1} - z_k) [\bar{C}_p]^{(k)} \right) \vec{\varepsilon}_0 + \left( \sum_{k=1}^3 \frac{(z_{k+1}^2 - z_k^2)}{2} [\bar{C}_p]^{(k)} \right) \vec{\kappa} - \left( \sum_{k=1}^3 (z_{k+1} - z_k) [\bar{e}_p]^{(k)} \right) \vec{E}^{(k)} \setminus \\
\vec{M} &= \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left( [\bar{C}_p]^{(k)} \vec{\varepsilon}_0 + z [\bar{C}_p]^{(k)} \vec{\kappa} - [\bar{e}_p]^{(k)} \vec{E}^{(k)} \right) z dz = \\
&= \left( \sum_{k=1}^3 \frac{(z_{k+1}^2 - z_k^2)}{2} [\bar{C}_p]^{(k)} \right) \vec{\varepsilon}_0 + \left( \sum_{k=1}^3 \frac{(z_{k+1}^3 - z_k^3)}{3} [\bar{C}_p]^{(k)} \right) \vec{\kappa} - \left( \sum_{k=1}^3 \frac{(z_{k+1}^2 - z_k^2)}{2} [\bar{e}_p]^{(k)} \right) \vec{E}^{(k)} \\
\vec{Q} &= \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{C}_c]^{(k)} \vec{\gamma}_c - [\bar{e}_c]^{(k)} \vec{E}^{(k)} dz = \\
&= \left( \sum_{k=1}^3 (z_{k+1} - z_k) [\bar{C}_c]^{(k)} \right) \vec{\gamma}_c - \left( \sum_{k=1}^3 (z_{k+1} - z_k) [\bar{e}_c]^{(k)} \right) \vec{E}^{(k)} =
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Definindo-se os termos:

$$h_{k,1} = (z_{k+1} - z_k), \quad h_{k,2} = \frac{(z_{k+1}^2 - z_k^2)}{2}, \quad h_{k,3} = \frac{(z_{k+1}^3 - z_k^3)}{3} \tag{3.63}$$

as expressões em (3.62) podem ser escritas na forma,

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \sum_{k=1}^3 h_{k,1} [\bar{C}_p]^{(k)} \vec{\varepsilon}_0 + \sum_{k=1}^3 h_{k,2} [\bar{C}_p]^{(k)} \vec{\kappa} - \sum_{k=1}^3 h_{k,1} [\bar{e}_p]^{(k)} \vec{E}^{(k)} \\
\vec{M} &= \sum_{k=1}^3 h_{k,2} [\bar{C}_p]^{(k)} \vec{\varepsilon}_0 + \sum_{k=1}^3 h_{k,3} [\bar{C}_p]^{(k)} \vec{\kappa} - \sum_{k=1}^3 h_{k,2} [\bar{e}_p]^{(k)} \vec{E}^{(k)} \\
\vec{Q} &= \sum_{k=1}^3 h_{k,1} [\bar{C}_c]^{(k)} \vec{\gamma}_c - \sum_{k=1}^3 h_{k,1} [\bar{e}_c]^{(k)} \vec{E}^{(k)}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Dessa forma, é possível definir as matrizes constitutivas generalizadas, na equação (3.62), para o laminado na seguinte forma

$$\begin{aligned}
 [\hat{\mathbf{A}}] &= \sum_{k=1}^3 h_{k,1} [\bar{\mathbf{C}}_p]^{(k)} \\
 [\hat{\mathbf{B}}] &= \sum_{k=1}^3 h_{k,2} [\bar{\mathbf{C}}_p]^{(k)} \\
 [\hat{\mathbf{D}}] &= \sum_{k=1}^3 h_{k,3} [\bar{\mathbf{C}}_p]^{(k)} \\
 [\hat{\mathbf{F}}] &= \sum_{k=1}^3 h_{k,1} [\bar{\mathbf{C}}_c]^{(k)} \\
 [\hat{\mathbf{G}}] &= \sum_{k=1}^3 h_{k,1} [\bar{\mathbf{e}}_p]^{(k)} \\
 [\hat{\mathbf{H}}] &= \sum_{k=1}^3 h_{k,2} [\bar{\mathbf{e}}_p]^{(k)} \\
 [\hat{\mathbf{I}}] &= \sum_{k=1}^3 h_{k,1} [\bar{\mathbf{e}}_c]^{(k)}
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Usando as definições acima, finalmente é possível obter a primeira equação da relação constitutiva descrita em (3.57), integrada na espessura e expressa em termos do carregamento generalizado na forma matricial, na forma:

$$\begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \\ \vec{Q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{D}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha \hat{\mathbf{F}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\epsilon}_0 \\ \vec{\kappa} \\ \vec{\gamma}_c \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}} \\ \hat{\mathbf{H}} \\ \hat{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \vec{E} \tag{3.66}$$

É necessário observar que a teoria de placas de Reissner-Mindlin representa tensões de cisalhamento transversal constantes na espessura da placa. Contudo, sabe-se que estas tensões possuem distribuições quadráticas ao longo da espessura. A introdução do termo de correção  $\alpha$  na Eq. (3.66) busca corrigir a energia de deformação associada ao cisalhamento transversal. O valor de  $\frac{5}{6}$  para  $\alpha$  é amplamente utilizado como correção para placas isotrópicas, este valor será usado no presente modelo. Entretanto, investigações são freqüentemente feitas para determinar outros valores de correção quando se trata de placas sanduíches (BIRMAN e BERT, 2002)

Faz-se agora necessária a obtenção da segunda equação descrita pela relação constitutiva em (3.57), integrada na espessura, como:

$$\begin{aligned}
\vec{D} &= \int_{-h/2}^{h/2} \vec{D}^{(k)} dz \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} [\bar{e}_p] & [\bar{e}_c] \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \vec{\varepsilon}_p \\ \vec{\gamma}_c \end{Bmatrix} + [\bar{\varepsilon}]^{(k)} \vec{E}^{(k)} dz
\end{aligned} \tag{3.67}$$

forneendo:

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}} & \hat{\mathbf{H}} & \hat{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\varepsilon}_0 \\ \vec{\kappa} \\ \vec{\gamma}_c \end{Bmatrix} + [\hat{\mathbf{J}}] \vec{E} \tag{3.68}$$

sendo:

$$[\hat{\mathbf{J}}] = \sum_{k=1}^3 h_{k,1} [\bar{\varepsilon}]^{(k)} \tag{3.69}$$

Note que o vetor cinemático usado nas equações constitutivas generalizadas em (3.66) e (3.68) é ligeiramente diferente do apresentado no vetor de deformações pura em (3.20) e usado na equação constitutiva (3.49). Este novo vetor cinemático é chamado aqui de deformações generalizadas,  $\vec{\varepsilon}_g$ , e é constituído das deformações de membrana, curvaturas de flexão e deformações cisalhantes transversais:

$$\vec{\varepsilon}_g = \left\{ \varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz} \right\}^T \tag{3.70}$$

Assim, colocam-se as equações constitutivas generalizadas (3.66) e (3.68), na forma compacta usando as definições de carregamento e deformações generalizados:

$$\left\{ \vec{C}_g \right\}_{8 \times 1} = [\mathbb{D}]_{8 \times 8} \left\{ \vec{\varepsilon}_g \right\}_{8 \times 1} - [\mathbb{E}]_{8 \times 3}^T \left\{ \vec{E} \right\}_{3 \times 1} \tag{3.71}$$

$$\left\{ \vec{D} \right\}_{3 \times 1} = [\mathbb{E}]_{3 \times 8} \left\{ \vec{\varepsilon}_g \right\}_{8 \times 1} + [\mathbb{J}]_{3 \times 3} \left\{ \vec{E} \right\}_{3 \times 1} \tag{3.72}$$

### 3.2.5 Discretização para Sensor e Atuador

Eletricamente o sensor é desacoplado do atuador. Ambos possuem circuitos elétricos diferentes que impõem as respectivas condições de contorno elétricas à lâmina piezoeletrica, ver Figura 3.10.

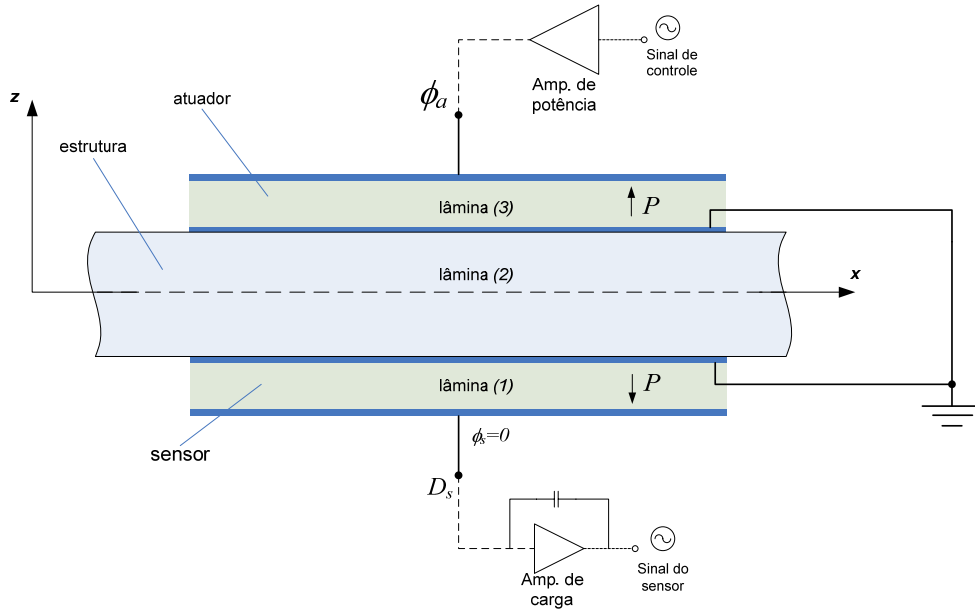


Figura 3.10: Sanduíche piezelétrico com os circuitos elétricos para atuador e sensor.

Dessa forma, o sensor e o atuador são especificados em camadas individuais pré-definidas. Assim sendo, pode-se separar o vetor de campo elétrico como:

$$\vec{E} = \begin{Bmatrix} \vec{E}^{(1)} \\ \vec{E}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

isto é, o campo elétrico é discretizado por camada de lâmina. Cada camada pode assumir o papel de atuador ou sensor dependendo da condição de contorno associada. No presente trabalho, em que os eletrodos estão dispostos no plano perpendicular à direção de polarização, as componentes  $E_1$  e  $E_2$  são nulas, e o vetor de campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = \begin{Bmatrix} \vec{E}^{(1)} \\ \vec{E}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ E_3^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

Usando a discretização em camadas proposta em (3.73), as relações constitutivas em (3.66) e (3.68) são também representadas em camadas de sensor e de atuador, na forma:

$$\begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \\ \vec{Q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{D}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha \hat{\mathbf{F}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\varepsilon}_0 \\ \vec{\kappa} \\ \vec{\gamma}_c \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}}^{(1)} & \hat{\mathbf{G}}^{(3)} \\ \hat{\mathbf{H}}^{(1)} & \hat{\mathbf{H}}^{(3)} \\ \hat{\mathbf{I}}^{(1)} & \hat{\mathbf{I}}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{E}^{(1)} \\ \vec{E}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3.75)$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{D}^{(1)} \\ \vec{D}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}}^{(1)} & \hat{\mathbf{H}}^{(1)} & \hat{\mathbf{I}}^{(1)} \\ \hat{\mathbf{G}}^{(3)} & \hat{\mathbf{H}}^{(3)} & \hat{\mathbf{I}}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\varepsilon}_0 \\ \vec{\kappa} \\ \vec{\gamma}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{J}}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{J}}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{E}^{(1)} \\ \vec{E}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3.76)$$

em que as matrizes de propriedades piezelétricas e dielétricas são integradas nas camadas inferior e superior, na forma,

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{G}}^{(1)}] &= h_{1,1}[\bar{e}_p]^{(1)}, & [\hat{\mathbf{G}}^{(3)}] &= h_{3,1}[\bar{e}_p]^{(3)} \\ [\hat{\mathbf{H}}^{(1)}] &= h_{1,2}[\bar{e}_p]^{(1)}, & [\hat{\mathbf{H}}^{(3)}] &= h_{3,2}[\bar{e}_p]^{(3)} \\ [\hat{\mathbf{I}}^{(1)}] &= h_{1,1}[\bar{e}_c]^{(1)}, & [\hat{\mathbf{I}}^{(3)}] &= h_{3,1}[\bar{e}_c]^{(3)} \\ [\hat{\mathbf{J}}^{(1)}] &= h_{1,1}[\bar{\varepsilon}]^{(1)}, & [\hat{\mathbf{J}}^{(3)}] &= h_{3,1}[\bar{\varepsilon}]^{(3)} \end{aligned} \quad (3.77)$$

A forma compacta para as equações constitutivas generalizadas e discretizada por camadas (3.75) e (3.76) são,

$$\{\vec{C}_g\}_{8 \times 1} = [\mathbb{D}]_{8 \times 8} \{\vec{\varepsilon}_g\}_{8 \times 1} - [\mathbb{E}]_{8 \times 6}^T \{\vec{E}\}_{6 \times 1} \quad (3.78)$$

$$\{\vec{D}\}_{6 \times 1} = [\mathbb{E}]_{6 \times 8} \{\vec{\varepsilon}_g\}_{8 \times 1} + [\mathbb{J}]_{6 \times 6} \{\vec{E}\}_{6 \times 1} \quad (3.79)$$

Assim, concluem-se as relações constitutivas para um material piezelétrico. Neste tópico foi apresentada a equação constitutiva da piezeletricidade 3D e sua redução para sistemas bidimensionais de placa. Em seguida foi derivada a equação constitutiva generalizada para placas sanduíches constituída de uma estrutura e de materiais piezelétricos. Por fim, as variáveis elétricas da equação constitutiva generalizada são postas em camadas discretas para representar adequadamente o sensor e o atuador.

### 3.3 Equação de Equilíbrio Dinâmica Eletro-Mecânica

#### 3.3.1 Equações da Eletrostática

Seja um corpo piezelétrico  $\Omega$ , apresentado na Figura 3.11, sujeito a uma densidade de polarização  $\vec{P}$  e um campo elétrico  $\vec{E}$ .

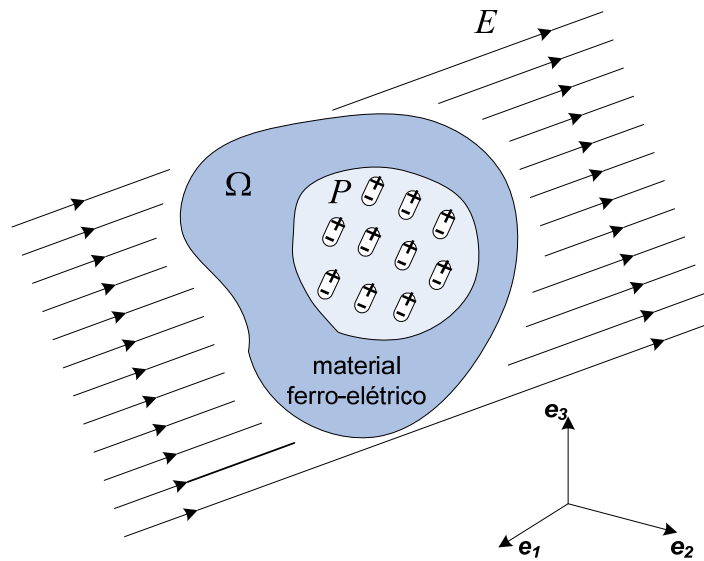


Figura 3.11: Polarização e campo elétrico em um corpo piezelétrico.

A força de corpo e o momento de dipolo elétrico devido à interação entre a polarização e o campo elétrico são respectivamente,

$$\begin{aligned}\vec{F}_p &= (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \\ \vec{M}_p &= \vec{P} \times \vec{E}\end{aligned}\tag{3.80}$$

Pela lei de Gauss deriva-se a conservação das cargas em um meio polarizado sem cargas livres,

$$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{D}) d\Omega = 0\tag{3.81}$$

### 3.3.2 Conservação do Momento Linear

As forças atuantes em um elemento de volume piezelétrico são (AHMAD *et al.*, 2006):

- Força de polarização devido ao campo elétrico:  $\vec{F}_p = (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$
- Força de corpo devido à gravidade:  $\vec{B} = \rho \vec{g}$
- Força mecânica interna devido à tração prescrita:  $\vec{F}_m = \text{div}(\sigma)$

Na ausência de cargas livres, o momentum linear de um corpo na configuração deformada pode ser escrito na forma:

$$\int_{\Omega} \vec{F}_m d\Omega + \int_{\Omega} (\vec{B} + \vec{F}_p) d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \dot{\vec{u}} d\Omega \quad (3.82)$$

Substituindo as forças relacionadas chega-se a,

$$\int_{\Omega} \text{div}(\sigma) d\Omega + \int_{\Omega} (\rho \vec{g} + (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}) d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \dot{\vec{u}} d\Omega \quad (3.83)$$

Sendo esta a equação de equilíbrio em termo volumétrico resultante do momento linear. Note que a diferença desta para meios não dielétricos é a inclusão do termo não-linear relacionado à força de polarização. Sendo o potencial elétrico aproximado por uma função linear ao longo da espessura, resulta em um campo elétrico constante e, por fim, o efeito desta parcela é nulo para o caso em questão.

Assim, para  $\vec{E} = \text{constante}$ ,  $\nabla \vec{E} = 0$  e a equação (3.83) escreve,

$$\int_{\Omega} \text{div}(\sigma) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \vec{g} d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \dot{\vec{u}} d\Omega \quad (3.84)$$

### 3.3.3 Formulação Forte

Face ao exposto a formulação forte associada ao problema acoplado mecânico-piezelétrico é escrito.

Determinar  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  e  $\phi(\vec{x}, t)$  solução do problema:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \vec{g} = \rho \ddot{\vec{u}} \quad (3.85)$$

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = 0 \quad (3.86)$$

sujeito às condições de contorno:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{\bar{u}} & \text{em } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} &= \vec{t} & \text{em } \Gamma_t \end{aligned} \quad (3.87)$$

e

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} & \text{em } \Gamma_\phi \\ \vec{D} \cdot \vec{n} &= \bar{\varrho} & \text{em } \Gamma_\varrho \end{aligned} \quad (3.88)$$

e sujeito às condições iniciais:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}, 0) &= \vec{u}_0(\vec{x}) \\ \dot{\vec{u}}(\vec{x}, 0) &= \vec{v}_0(\vec{x}) \\ \phi(\vec{x}, 0) &= \phi_0(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.89)$$

É importante salientar que a busca das soluções devem satisfazer ao conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis e, representado por:

$$\mathcal{K}_u = \{u(\vec{x}) : \text{contínuo, diferenciável e } u(0) = \bar{u}\} \quad (3.90)$$

### 3.4 Princípio Variacional

As equações de equilíbrio dinâmico podem ser derivadas do princípio variacional de Hamilton.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \mathcal{L} d\Omega dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (3.91)$$

em que o Lagrangiano é dado por,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \dot{\vec{u}} \cdot \dot{\vec{u}} - H \quad (3.92)$$



Note que no problema estendido para um sistema eletromecânico, veja (TIERSTEN, 1967), o funcional Lagrangiano é uma função da energia cinética e da entalpia  $H$  do sistema. Para o meio piezelétrico, a entalpia inclui uma parcela devido à energia potencial mecânica e outra devido à energia potencial elétrica, sendo escrita na forma:

$$H = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\varepsilon} - \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (3.93)$$

Voltando a equação (3.91) o total de trabalho virtual  $\delta W$  realizado pelas forças externas atuantes na superfície do corpo é

$$\delta W = \int_{\Omega} \rho \vec{g} \cdot \delta \vec{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} d\Gamma_t + \vec{F}_p \cdot \delta \vec{u} - \int_{\partial\Omega_\varphi} \varrho \delta \phi d\Gamma_\varphi - Q \delta \phi \quad (3.94)$$

em que, sendo o efeito eletromagnético no corpo do dielétrico desprezível, a única força de corpo atuante é a da gravidade  $\vec{g}$ . Na superfície têm-se a tração prescrita  $\vec{t}$  em  $\Gamma_t$  e a densidade de cargas elétricas  $\varrho$  em  $\Gamma_\varphi$ . E como cargas concentradas têm-se  $\vec{F}_p$  e  $Q$  respectivamente para força mecânica e carga elétrica pontual.

Substituindo a Eq. (3.93) em (3.92) e levando em (3.91) pode-se trabalhar a parcela referente ao Lagrangiano do Hamiltoniano na Eq. (3.91).

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \mathcal{L} d\Omega dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho \dot{\vec{u}} \cdot \dot{\vec{u}} - \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\varepsilon} + \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \right) d\Omega dt \quad (3.95)$$

Obtidas as relações constitutivas para  $\sigma$  e  $D$  na Seção 3.2 usando apropriadamente na Eq. (3.95), chega-se à:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \mathcal{L} d\Omega dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho \dot{\vec{u}} \cdot \dot{\vec{u}} - \frac{1}{2} ([c^E] \vec{\varepsilon} - [e]^T \vec{E}) \cdot \vec{\varepsilon} + \frac{1}{2} ([e] \vec{\varepsilon} + [\epsilon^E] \vec{E}) \cdot \vec{E} \right) d\Omega dt \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho \dot{\vec{u}} \cdot \dot{\vec{u}} - \frac{1}{2} [c^E] \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon} + [e]^T \vec{E} \cdot \vec{\varepsilon} + \frac{1}{2} [\epsilon^E] \vec{E} \cdot \vec{E} \right) d\Omega dt \end{aligned} \quad (3.96)$$

Sendo a operação de variação designada pelo operador linear  $\delta$ , é possível inter-cambiar a operação de variação com as integrais resolvendo na forma:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \mathcal{L} d\Omega dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left( \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \dot{\vec{u}} - [c^E] \vec{\varepsilon} \cdot \delta \vec{\varepsilon} + [e]^T \vec{E} \cdot \delta \vec{\varepsilon} + [e] \vec{\varepsilon} \cdot \delta \vec{E} + [\epsilon^E] \vec{E} \cdot \delta \vec{E} \right) d\Omega dt \quad (3.97)$$

Integrando a variação da energia cinética por partes sobre o intervalo de tempo obtêm,

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \dot{\vec{u}} dt = \rho \dot{\vec{u}} \cdot \delta \vec{u} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho \dot{\vec{u}} \cdot \delta \vec{u} dt \quad (3.98)$$

em que o primeiro termo é nulo pois  $\delta \vec{u} = 0$  nas extremidades em  $t = t_1$  e  $t = t_2$ . Isto porque as variações dos deslocamentos admissíveis devem pertencer ao conjunto definido por:

$$\mathcal{V}ar_u = \{u(\vec{x}) : \text{contínuo, diferenciável e } u(0) = 0\} \quad (3.99)$$

Levando a equação (3.98) em (3.97) o Lagrangiano toma a forma:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \mathcal{L} d\Omega dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left( \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \vec{u} + [c^E] \vec{\varepsilon} \cdot \delta \vec{\varepsilon} - [e]^T \vec{E} \cdot \delta \vec{\varepsilon} - [e] \vec{\varepsilon} \cdot \delta \vec{E} - [\epsilon^E] \vec{E} \cdot \delta \vec{E} \right) d\Omega dt \quad (3.100)$$

De posse do Lagrangiano escrito na forma da equação (3.100) e do trabalho virtual derivado na equação (3.94) o princípio variacional de Hamilton é escrito:

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_{\Omega} \left( \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \vec{u} + [c^E] \vec{\varepsilon} \cdot \delta \vec{\varepsilon} - [e]^T \vec{E} \cdot \delta \vec{\varepsilon} - [e] \vec{\varepsilon} \cdot \delta \vec{E} - [\epsilon^E] \vec{E} \cdot \delta \vec{E} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho \vec{g} \cdot \delta \vec{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} d\Gamma_t + \vec{F}_p \cdot \delta \vec{u} - \int_{\partial\Omega_e} q \delta\phi d\Gamma_e - Q \delta\phi \end{aligned} \quad (3.101)$$

A identidade da equação (3.101) deve valer para quaisquer  $\delta \vec{u} \in \mathcal{V}ar_u$  e  $\delta\phi \in \mathcal{V}ar_\phi$ , e ainda, sabendo que  $\delta \vec{\varepsilon} = \varepsilon(\delta \vec{u})$  e  $\delta E = E(\delta\phi)$ , a equação (3.101) pode ser satisfeitas por duas equações de equilíbrio com os termos independentes  $\delta \vec{u}$  e  $\delta\phi$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \vec{u} + [c^E] \vec{\varepsilon} \cdot \delta \vec{\varepsilon} - [e]^T \vec{E} \cdot \delta \vec{\varepsilon} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \vec{g} \cdot \delta \vec{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} d\Gamma_t + \vec{F}_p \cdot \delta \vec{u} \\ \int_{\Omega} \left( [e] \vec{\varepsilon} \cdot \delta \vec{E} + [\epsilon^E] \vec{E} \cdot \delta \vec{E} \right) d\Omega &= \int_{\partial\Omega_e} q \delta\phi d\Gamma_e + Q \delta\phi \end{aligned} \quad (3.102)$$

### 3.4.1 Formulação Fraca

Com base no exposto do problema variacional, pode-se escrever o problema dinâmico piezelétrico em sua forma fraca como: Para cada  $t \in [0, t_f]$  determinar  $\vec{u}(\vec{x}, t) \in \mathcal{K}_u$  e  $\phi(\vec{x}, t) \in \mathcal{K}_\phi$  para quaisquer  $\delta \vec{u} \in \mathcal{Var}_u$  e  $\delta \phi \in \mathcal{Var}_\phi$  tal que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \vec{u} + \vec{\sigma} \cdot \vec{\varepsilon}(\delta \vec{u}) \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \vec{g} \cdot \delta \vec{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} d\Gamma_t + \vec{F}_p \cdot \delta \vec{u} \\ \int_{\Omega} \left( \vec{D} \cdot \vec{E}(\delta \phi) \right) d\Omega &= \int_{\partial\Omega_q} q \delta \phi d\Gamma_q + Q \delta \phi \end{aligned} \quad (3.103)$$

sujeito às condições iniciais:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{u}(\vec{x}, 0) \cdot \delta \vec{u} d\Omega &= \int_{\Omega} \vec{u}_0(\vec{x}) \cdot \delta \vec{u} d\Omega \\ \int_{\Omega} \dot{\vec{u}}(\vec{x}, 0) \cdot \delta \vec{u} d\Omega &= \int_{\Omega} \dot{\vec{u}}_0(\vec{x}) \cdot \delta \vec{u} d\Omega \\ \int_{\Omega} \phi(\vec{x}, 0) \cdot \delta \phi d\Omega &= \int_{\Omega} \phi_0(\vec{x}) \cdot \delta \phi d\Omega \end{aligned} \quad (3.104)$$

sendo as soluções encontradas dentro dos conjuntos de soluções admissíveis:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_u &= \left\{ u(\vec{x}) : \text{contínuo, diferenciável por partes e } \vec{u}(0) = \vec{u} \right\} \\ \mathcal{K}_\phi &= \left\{ \phi(\vec{x}) : \text{contínuo, diferenciável por partes e } \phi(0) = \bar{\phi} \right\} \end{aligned} \quad (3.105)$$

e suas variações:

$$\begin{aligned} \mathcal{Var}_u &= \left\{ u(\vec{x}) : \text{contínuo, diferenciável por partes e } \vec{u}(0) = 0 \right\} \\ \mathcal{Var}_\phi &= \left\{ \phi(\vec{x}) : \text{contínuo, diferenciável por partes e } \phi(0) = 0 \right\} \end{aligned} \quad (3.106)$$

### 3.4.2 Resolução da Formulação Fraca para Placa Sanduíche

Em uma estrutura homogênea e contínua, de posse das relações constitutivas e cinemáticas, faz-se a substituição direta no Hamiltoniano para determinar o problema na formulação fraca em termos do vetor de graus de liberdade  $\{\vec{u}, \phi\}$ . Contudo em uma estrutura sanduíche, devido à descontinuidade das tensões, faz-se necessário o uso do vetor de car-

regamentos generalizados,  $\vec{C}_g$ , para resolver a formulação fraca em termos dos graus de liberdade do sistema.

Para resolver a primeira equação da formulação descrita em (3.103) reescrevem-se aqui as relações cinemáticas determinada na Seção 3.1.2.

O vetor de deslocamento  $\vec{u}$ , definido pelas equações em (3.16), é expresso aqui na forma:

$$\vec{u}(x, y, z) = \vec{u}_0(x, y) - z\vec{\theta}(x, y) = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.107)$$

O vetor de deformações, como definido em (3.20), é:

$$\vec{\varepsilon}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \vec{\varepsilon}_0 + z\vec{\kappa} \\ \vec{\gamma}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 + z\kappa_{xx} \\ \varepsilon_{yy}^0 + z\kappa_{yy} \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

O potencial elétrico para a lâmina piezelétrica inferior e superior é constante no plano  $xy$ ,

$$\vec{\phi}(x, y) = \begin{Bmatrix} \phi_o^{(1)} \\ \phi_o^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3.108)$$

O campo elétrico de acordo com a relação (3.31) para o potencial acima, exposto no formato de camadas discretas de acordo com (3.74), é

$$\vec{E} = \begin{Bmatrix} \vec{E}^{(1)} \\ \vec{E}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1/h^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1/h^{(3)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_o^{(1)} \\ \phi_o^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3.109)$$

Note que  $\vec{u}_0$ ,  $\vec{\theta}_0$ ,  $\vec{\varepsilon}_0$ ,  $\vec{\kappa}$  e  $\vec{\gamma}_c$  são funções de  $(x, y)$  somente e,  $\vec{E}^{(1)}$ ,  $\vec{E}^{(3)}$ ,  $\phi_o^{(1)}$  e  $\phi_o^{(3)}$  são constantes no plano  $xy$ . Assim, revisto estas relações, podem-se numerar as parcelas da forma fraca definida na equação de (3.103) na forma,

$$\underbrace{\int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot \delta \vec{u} d\Omega}_1 + \underbrace{\int_{\Omega} \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{\varepsilon} d\Omega}_2 = \underbrace{\int_{\Omega} \rho \vec{g} \cdot \delta \vec{u} d\Omega}_3 + \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} d\Gamma_t}_4 + \underbrace{\vec{F}_p \cdot \delta \vec{u}}_5$$

$$\underbrace{\int_{\Omega} \vec{D} \cdot \delta \vec{E} d\Omega}_6 = \underbrace{\int_{\partial\Omega_e} \varrho \delta \phi d\Gamma_e}_7 + \underbrace{Q \delta \phi}_8 \quad (3.110)$$

A seguir cada parcela da equação (3.110) é desenvolvida individualmente.

#### 1 - Resolvendo a parcela dinâmica:

Usando a hipótese de deslocamento (3.107), a parcela dinâmica pode ser aberta na forma,

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot \delta \vec{u} d\Omega = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \frac{d^2}{dt^2} (\vec{u}_0 - z \vec{\theta}) \cdot \delta (\vec{u}_0 - z \vec{\theta}) dz dA$$

$$= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (\ddot{\vec{u}}_0 - z \ddot{\vec{\theta}}) \cdot \delta (\vec{u}_0 - z \vec{\theta}) dz dA \quad (3.111)$$

Realizando a operação escalar entre os termos de aceleração e deslocamento virtual, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot \delta \vec{u} d\Omega = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \ddot{\vec{u}}_0 \cdot \delta \vec{u}_0 - \rho z (\ddot{\vec{u}}_0 \cdot \delta \vec{\theta} + \ddot{\vec{\theta}} \cdot \delta \vec{u}_0) + \rho z^2 \ddot{\vec{\theta}} \cdot \delta \vec{\theta} dz d\Omega \quad (3.112)$$

Integrando a expressão (3.112) na espessura, notando que a integral deve ser discretizada para a  $k$  – ésima lâmina, cuja espessura é dada pelas coordenadas  $(z_k, z_{k+1})$  e a densidade de cada lâmina é  $\rho^k$ ,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot \delta \vec{u} d\Omega &= \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\} (\ddot{u}_0 \cdot \delta \vec{u}_0) dA \\
&\quad - \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,2} \right\} (\ddot{u}_0 \cdot \delta \vec{\theta} + \ddot{\theta} \cdot \delta \vec{u}_0) dA \\
&\quad + \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,3} \right\} (\ddot{\theta} \cdot \delta \vec{\theta}) dA
\end{aligned} \tag{3.113}$$

em que,  $h_{k,1}$ ,  $h_{k,2}$  e  $h_{k,3}$  são as mesmas funções dadas pelas expressões em (3.63). Os somatórios na expressão (3.113) podem ser definidos como constantes de inércia de massa como:

$$I_1 = \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\}, \quad I_2 = \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,2} \right\}, \quad I_3 = \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,3} \right\} \tag{3.114}$$

Dessa forma, é possível escrever a parcela de inércia na forma fraca do problema por,

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot \delta \vec{u} d\Omega = \int_A I_1 (\ddot{u}_0 \cdot \delta \vec{u}_0) - I_2 (\ddot{u}_0 \cdot \delta \vec{\theta} + \ddot{\theta} \cdot \delta \vec{u}_0) + I_3 (\ddot{\theta} \cdot \delta \vec{\theta}) dA \tag{3.115}$$

2 - Resolvendo a parcela das forças internas:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{\varepsilon} d\Omega &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \vec{\sigma}_p \cdot (\delta \vec{\varepsilon}_0 + z \delta \vec{\kappa}) + \vec{\sigma}_c \cdot \delta \vec{\gamma}_c \right\} dz dA \\
&= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \vec{\sigma}_p \cdot \delta \vec{\varepsilon}_0 + z \vec{\sigma}_p \cdot \delta \vec{\kappa} + \vec{\sigma}_c \cdot \delta \vec{\gamma}_c \right\} dz dA
\end{aligned} \tag{3.116}$$

As relações definidas em (3.61) permitem integrar a expressão (3.116) na espessura, colocando os termos em função do carregamento generalizado, na forma:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{\varepsilon} d\Omega &= \int_A \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{\varepsilon}_0 + \vec{M} \cdot \delta \vec{\kappa} + \vec{Q} \cdot \delta \vec{\gamma} \right\} dA \\
&= \int_A \begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \\ \vec{Q} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta \vec{\varepsilon}_0 \\ \delta \vec{\kappa} \\ \delta \vec{\gamma} \end{Bmatrix} dA
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Substituindo a equação constitutiva generalizada (3.66),

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{\varepsilon} d\Omega &= \int_A \{ (\hat{\mathbf{A}} \vec{\varepsilon}_0 + \hat{\mathbf{B}} \vec{\kappa} - \hat{\mathbf{G}} \vec{E}) \cdot \delta \vec{\varepsilon}_0 + (\hat{\mathbf{B}} \vec{\varepsilon}_0 + \hat{\mathbf{D}} \vec{\kappa} - \hat{\mathbf{H}} \vec{E}) \cdot \delta \vec{\kappa} + (\alpha \hat{\mathbf{F}} \vec{\gamma}_c - \hat{\mathbf{I}} \vec{E}) \cdot \delta \vec{\gamma}_c \} dA \\
&= \int_A \left\{ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{D}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha \hat{\mathbf{F}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\varepsilon}_0 \\ \vec{\kappa} \\ \vec{\gamma}_c \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}} \\ \hat{\mathbf{H}} \\ \hat{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \vec{E} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} \delta \vec{\varepsilon}_0 \\ \delta \vec{\kappa} \\ \delta \vec{\gamma}_c \end{Bmatrix} dA
\end{aligned} \tag{3.118}$$

em que  $\alpha$  é o fator de correção da energia de cisalhamento.

Usando a matriz constitutiva na forma compacta como definida em (3.71), e realizando a operação escalar, é obtido,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{\varepsilon} d\Omega &= \int_A \left\{ [\mathbb{D}] \vec{\varepsilon}_g - [\mathbb{E}]^T \vec{E} \right\} \cdot \delta \vec{D}_g dA \\
&= \int_A [\mathbb{D}] \vec{\varepsilon}_g \cdot \delta \vec{D}_g - [\mathbb{E}]^T \vec{E} \cdot \delta \vec{D}_g dA
\end{aligned} \tag{3.119}$$

3 - Resolvendo a parcela da força de corpo gravitacional:

Sendo a única força de corpo atuante na estrutura aquela devido à aceleração gravitacional de componentes  $\vec{g} = \{g_x, g_y, g_z\}$  operando com o deslocamento virtual com a hipótese deslocamento (3.107), a parcela de energia devida à força gravitacional é,

$$\int_{\Omega} \rho \vec{g} \cdot \delta \vec{u} d\Omega = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \vec{g} \cdot (\delta \vec{u}_0 - z \delta \vec{\theta}) dz dA \tag{3.120}$$

Integrando a expressão (3.120) acima na espessura sob o mesmo procedimento usado para a parcela de inércia (3.113) em que a estrutura é discretizada em  $k$  lâminas tem-se:

$$\int_{\Omega} \rho \vec{g} \cdot \delta \vec{u} d\Omega = \int_A I_1 (\vec{g} \cdot \delta \vec{u}_0) dA - \int_A I_2 (\vec{g} \cdot \delta \vec{\theta}) dA \tag{3.121}$$

em que  $I_1$  e  $I_2$  são dados pelas expressões em (3.114).

4 - Resolvendo a parcela do carregamento prescrito no contorno:

O contorno da placa pode ser dividido em duas regiões, ver Figura 3.12.

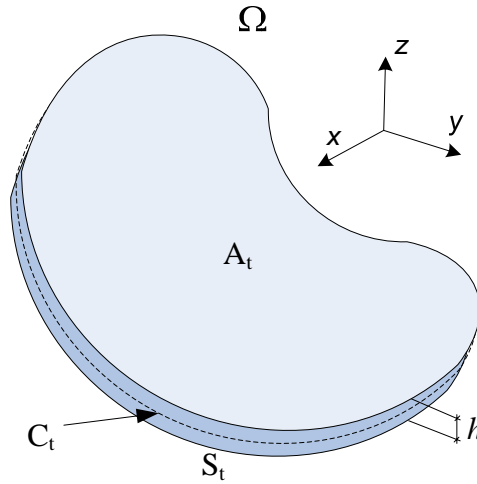


Figura 3.12: Contorno da placa dividido em duas regiões  $S_t$  e  $A_t$ .

A borda da placa é representada pela região  $S_t = C_t \times [-h/2, h/2]$ . Nesta, o carregamento prescrito é integrado na espessura da placa e aplicado da linha média do contorno. A segunda região é a definida pela superfície superior e inferior da placa  $A_t$ , o carregamento nesta superfície é aplicado sobre a área das mesmas. Neste trabalho o carregamento aplicado na segunda região é simplificado para uma distribuição na superfície média da placa como em Teles, (2007). Assim a parcela do carregamento prescrito no contorno é dividida nestas duas regiões na forma:

$$\int_{\partial\Omega_t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} d\Gamma_t = \int_{C_t} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} dz dS_t + \int_{A_t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} dA_t \quad (3.122)$$

Na borda da placa a tração prescrita possui as direções  $\{\vec{e}_n, \vec{e}_s, \vec{e}_z\}$  definidas na superfície de contorno mostrado na Figura 3.13.

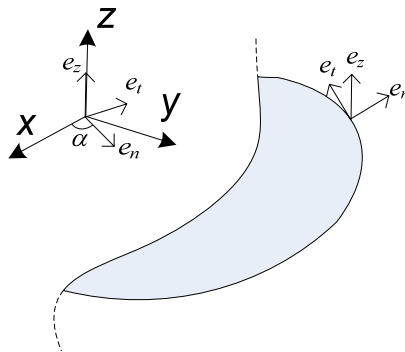


Figura 3.13: Vetores diretores para tração prescrita no contorno da placa.



A transformação do vetor de tração para coordenadas cartesianas é feita pela matriz de rotação na forma:

$$\vec{t} = \begin{Bmatrix} \vec{t}_x \\ \vec{t}_y \\ \vec{t}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{t}_n \\ \vec{t}_s \\ \vec{t}_z \end{Bmatrix} \quad (3.123)$$

em que  $\alpha$  é o ângulo entre os vetores diretores  $\vec{e}_n$  e  $\vec{e}_x$ . Seja a matriz de rotação denotada por  $[R]$ . Usando esta notação e levando (3.123) na primeira integral da parcela direita da equação (3.122) tem-se,

$$\int_{C_t} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dz \, dS_t = \int_{C_t} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [R] \begin{Bmatrix} \vec{t}_n \\ \vec{t}_s \\ \vec{t}_z \end{Bmatrix} \cdot (\delta \vec{u}_0 - z \delta \vec{\theta}) \, dz \, dS_t \quad (3.124)$$

Definindo o carregamento prescrito por espessura da placa, na forma,

$$\vec{N} = \begin{Bmatrix} \vec{N}_n \\ \vec{N}_s \\ \vec{N}_z \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \vec{t}_n \\ \vec{t}_s \\ \vec{t}_z \end{Bmatrix} dz, \quad \vec{M} = \begin{Bmatrix} \vec{M}_n \\ \vec{M}_s \\ \vec{M}_z \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \vec{t}_n \\ \vec{t}_s \\ \vec{t}_z \end{Bmatrix} z \, dz \quad (3.125)$$

Usando estas definições pode-se escrever a Eq. (3.124) em termos dos carregamentos aplicados na espessura da placa, obtendo-se:

$$\int_{C_t} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dz \, dS_t = \int_{C_t} [R] \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_0 - [R] \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \, dS_t \quad (3.126)$$

Tratando agora da segunda região, se o único carregamento prescrito é normal à superfície, a segunda parcela da equação (3.122) pode ser escrita em  $z = 0$  como:

$$\int_{A_t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dA_t = \int_{A_t} \vec{q} \cdot (\delta \vec{u}_0) \, dA_t \quad (3.127)$$

Considerando  $\vec{\bar{q}} = \{0, 0, \bar{q}\}^T$  normal à superfície, a operação escalar em (3.127) simplifica para,

$$\int_{A_t} \vec{\bar{t}} \cdot \delta \vec{u} dA_t = \int_{A_t} \bar{q} \cdot \delta w dA_t \quad (3.128)$$

Combinando os resultados obtidos em (3.126) e (3.128), a integral do carregamento prescrito no contorno finalmente é escrita na forma,

$$\int_{\partial\Omega_t} \vec{\bar{t}} \cdot \delta \vec{u} d\Gamma_t = \int_{C_t} [R] \vec{\bar{N}} \cdot \delta \vec{u}_0 - [R] \vec{\bar{M}} \cdot \delta \vec{\theta} dS_t + \int_{A_t} \bar{q} \cdot \delta w dA_t \quad (3.129)$$

5 - Resolvendo a parcela do carregamento prescrito pontual:

$$\vec{F}_p \cdot \delta \vec{u} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \cdot \delta \vec{u} \quad (3.130)$$

Substituindo a hipótese de deslocamento é obtido,

$$\begin{aligned} \vec{F}_p \cdot \delta \vec{u} &= \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \cdot \left\{ \delta \vec{u}_0 - z \delta \vec{\theta} \right\} \\ &= \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \delta \vec{u}_0 - \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{Bmatrix} \delta \vec{\theta} \end{aligned} \quad (3.131)$$

6 - Resolvendo a parcela de campo elétrico:

Usando a equação constitutiva (3.58) para a lâmina, o termo de energia devido à parcela de campo elétrico é

$$\int_{\Omega} \vec{D} \cdot \delta \vec{E} d\Omega = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \begin{bmatrix} [\bar{e}_p] & [\bar{e}_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\mathcal{E}}_0 + z \vec{\mathcal{K}} \\ \vec{\gamma}_c \end{Bmatrix} + [\bar{\epsilon}] \vec{E} \right) \cdot \delta \vec{E} dz dA \quad (3.132)$$

Operando os termos matriciais e integrando na espessura para a  $k$ -ésima lâmina é obtido,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \vec{D} \cdot \delta \vec{E} \, d\Omega &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( [\bar{e}_p] \vec{\varepsilon}_0 + z [\bar{e}_p] \vec{\kappa} + [\bar{e}_c] \vec{\gamma}_c + [\bar{\epsilon}] \vec{E} \right) \cdot \delta \vec{E} \, dz \, dA \\
&= \int_A \left( \sum_{k=1}^3 h_{k,1} [\bar{e}_p]^{(k)} \vec{\varepsilon}_0 + \sum_{k=1}^3 h_{k,2} [\bar{e}_p]^{(k)} \vec{\kappa} + \sum_{k=1}^3 h_{k,1} [\bar{e}_c]^{(k)} \vec{\gamma}_c + \sum_{k=1}^3 h_{k,1} [\bar{\epsilon}]^{(k)} \vec{E} \right) \cdot \delta \vec{E} \, dA
\end{aligned} \quad (3.133)$$

em que se identificam as relações definidas em (3.65) e (3.69). Assim, a expressão é escrita de forma simplificada, na forma,

$$\int_{\Omega} \vec{D} \cdot \delta \vec{E} \, d\Omega = \int_A \left( \hat{\mathbf{G}} \vec{\varepsilon}_0 + \hat{\mathbf{H}} \vec{\kappa} + \hat{\mathbf{I}} \vec{\gamma}_c + \hat{\mathbf{J}} \vec{E} \right) \cdot \delta \vec{E} \, d\Omega \quad (3.134)$$

Escrevendo de forma matricial, como em (3.68), e realizando o produto escalar, obtém-se

$$\int_{\Omega} \vec{D} \cdot \delta \vec{E} \, d\Omega = \int_A \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}} & \hat{\mathbf{H}} & \hat{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\varepsilon}_0 \\ \vec{\kappa} \\ \vec{\gamma}_c \end{Bmatrix} \cdot \delta \vec{E} + [\hat{\mathbf{J}}] \vec{E} \cdot \delta \vec{E} \, dA \quad (3.135)$$

que pode ser escrito no formato compacto em termos da deformação generalizada como,

$$\int_{\Omega} \vec{D} \cdot \delta \vec{E} \, d\Omega = \int_A \left( [\mathbb{E}] \vec{\varepsilon}_g + [\mathbb{J}] \vec{E} \right) \cdot \delta \vec{E} \, dA \quad (3.136)$$

7 - Resolvendo a parcela de carga elétrica prescrita:

A carga elétrica deve ser prescrita independentemente para a lâmina superior e para lâmina inferior, conforme a Seção 3.2.5. Assim, a parcela de carga elétrica prescrita pode ser posta da seguinte forma,

$$\int_{\partial\Omega_{\varrho}} \varrho \delta \phi(x, y, z) \, d\Gamma_{\varrho} = \int_{\partial\Omega_{\varrho}} \begin{Bmatrix} \varrho^{(1)} \\ \varrho^{(3)} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta \phi^{(1)}(x, y, z) \\ \delta \phi^{(3)}(x, y, z) \end{Bmatrix} \, d\Gamma_{\varrho} \quad (3.137)$$

A hipótese cinemática para um campo eletrostático constante na Seção 3.1.4 exige uma distribuição linear do potencial elétrico ao longo da espessura, conforme a Eq. (3.29). Assim, na superfície superior e inferior, tem-se:

$$\int_{\partial\Omega_e} \rho \delta\phi(x, y, z) d\Gamma_e = \int_{\partial A} \left\{ \begin{matrix} \rho^{(1)} \\ \rho^{(3)} \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \delta\phi^{(1)} \\ \delta\phi^{(3)} \end{matrix} \right\} dA_e \quad (3.138)$$

Com isto conclui-se a resolução da formulação fraca para placas sanduíches piezelétricas coladas à superfície. Reunindo todas as equações dos Itens de 1 a 7 tem-se a formulação fraca para placas sanduíches com piezelétricos. Esta formulação será resolvida usando o método dos elementos finitos a seguir.

### 3.5 Método dos Elementos Finitos para o Problema Acoplado

O método dos elementos finitos (MEF) é uma poderosa ferramenta de discretização numérica. Este método pode ser usado para resolver os mais variados problemas, como por exemplo: análise de tensões, transferência de calor, campo eletromagnético, dinâmica e vibrações, etc. A abrangência do método vai além dos problemas tradicionais da física. O MEF também é usado na simulação de problemas de meteorologia, áreas médicas e biológicas. A maior vantagem do método, contudo, resume-se na capacidade de fornecer soluções aproximadas para geometrias de formas gerais. Soluções analíticas exatas, por sua vez, são impossíveis de serem obtidas para tais geometrias.

No MEF as integrais da forma fraca são resolvidas para domínios de forma geométrica simples, denominado elementos. Assim, os elementos são usados para discretizar uma geometria complexa em domínios simplificados. Uma representação deste procedimento pode ser visto na Figura 3.14 abaixo. O conjunto de elementos que formam a domínio  $\Omega$  é chamado de malha e, para que haja continuidade do domínio, os elementos devem estar conectados uns aos outros por nós.

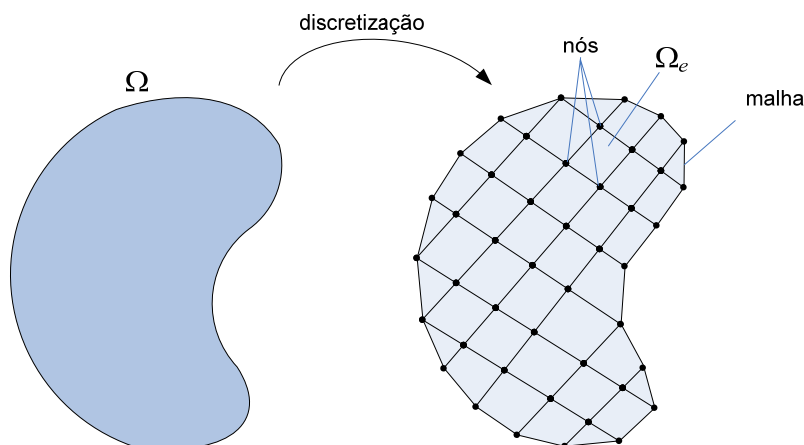


Figura 3.14: Discretização de um corpo em elementos finitos.

No que concerne ao domínio dos elementos, estes devem conter todas as variáveis incógnitas, presentes na formulação fraca seja de forma direta ou por seus gradientes (variáveis de campo). O conjunto de variáveis incógnitas presentes no elemento é denominado grau de liberdade (GL). Na mecânica dos sólidos, os GL presentes no elemento são discretizados nos nós e supõe-se que a variação destas incógnitas no domínio do elemento,  $\Omega_e$ , se comportam conforme funções de aproximação previamente estabelecidas.

No problema piezoeletrico, além das tradicionais variáveis de deslocamento mecânico, têm-se também as variáveis elétricas resultantes do acoplamento eletro-mecânico. A Figura 3.15 mostra um elemento piezoeletrico de placa com suas variáveis incógnitas, presentes na forma fraca, estas são: variáveis mecânicas  $u, v, w, \theta_x, \theta_y$  e; variáveis elétricas  $\phi^{(k)}$ . As variáveis de campo correspondentes são as deformações  $\vec{\varepsilon}, \vec{\kappa}, \vec{\gamma}$  e o campo elétrico  $\vec{E}^{(k)}$ .

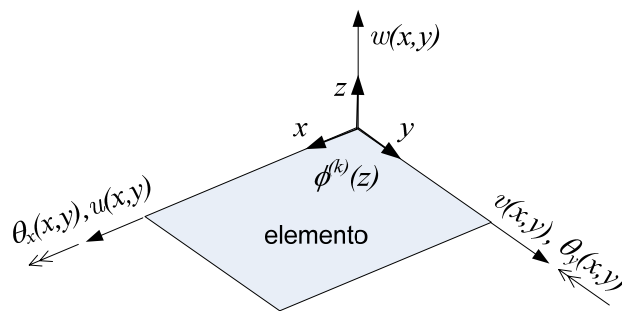


Figura 3.15: Elemento da placa sanduíche piezoeletrica e os graus de liberdade envolvidos.

Os elementos planos mais simples são os elementos retangulares, como aquele mostrado na Figura 3.15, e os elementos triangulares. Os elementos retangulares desenvolvidos a partir de um referencial particular não são aptos a serem usados em discretizações de domínios irregulares e graduações de malha (SORIANO, 2003). Contudo esta desvantagem aparente pode facilmente ser resolvida mediante a parametrização do elemento, que será tratado a seguir.

### 3.5.1 Elemento Isoparamétrico

Elementos sofisticados podem ser classificados de acordo com suas características em duas famílias, a saber, família *Serendipity* e família *Lagrange*. Na família Lagrange as funções de aproximação usadas para interpolar as variáveis incógnitas são obtidas pela multiplicação de polinômios em coordenadas distintas (SORIANO, 2003). Por exemplo, o elemento biquadrático, a ser usado nesta dissertação, é obtido pelo produto de duas fun-

ções quadráticas completas do triângulo de pascal. Para representar estas funções em termos de coordenadas nodais é necessário que o elemento tenha 9 nós, por isso o elemento também é conhecido como Q9 (designando quadrático de nove nós), ver Figura 3.16. A vantagem dos elementos quadráticos em relação aos elementos lineares, é que o primeiro não apresenta o problema da tensão de cisalhamento parasita quando o elemento está sob flexão (COOK *et al*, 2002). Uma segunda vantagem é a possibilidade de obter contornos curvilíneos, aproximando melhor um domínio de geometria curva.

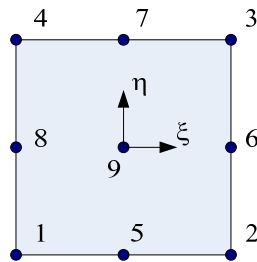


Figura 3.16: Elemento de Lagrange biquadrático de 9 nós definido em coordenadas naturais.

A parametrização dos elementos em coordenadas naturais permite que os elementos usados na discretização espacial possam ser distorcidos, apresentando formas não retangulares. O elemento em coordenadas físicas é então mapeado para a forma retangular no espaço de coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$ . Uma representação desta transformação paramétrica é idealizada por Cook *et al* (2002) na Figura 3.17. A formulação paramétrica permite a construção de malhas de transição para um refino de detalhes da geometria ou uma melhor representação do contorno.

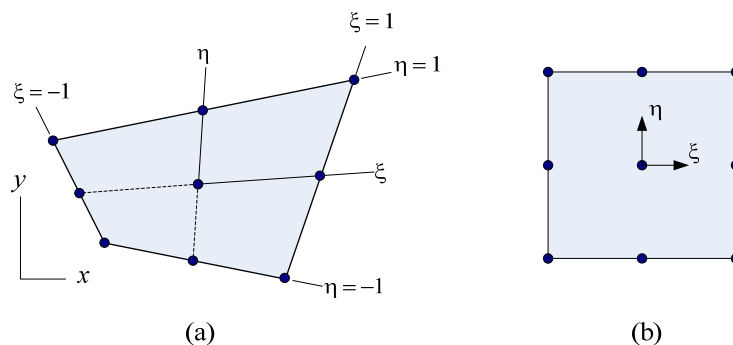


Figura 3.17: (a) Elemento plano Q9 distorcido no espaço de coordenada físico. (b) O mesmo elemento parametrizado no espaço de coordenadas naturais  $\xi\eta$ .

O elemento é dito ser isoparamétrico quando as mesmas funções utilizadas para a aproximação das variáveis de deslocamento (no caso da elasticidade linear) são usadas

para interpolar um ponto de coordenada dentro do elemento em função das coordenadas nodais. Assim têm-se:

$$\vec{x}_e(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} \sum_{n=1}^9 N_i(\xi, \eta) x_i \\ \sum_{n=1}^9 N_i(\xi, \eta) y_i \end{Bmatrix} \quad (3.139)$$

em que  $N_i$ , são as funções de forma que interpolam as coordenadas do elemento em função das coordenadas dos nós  $i = 1, \dots, 9$ . Estas funções são dadas numa formulação paramétrica por  $N_i(\xi, \eta)$ :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta) & N_5 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta) & N_6 &= \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta) & N_7 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta) & N_8 &= \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2) \\ N_9 &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (3.140)$$

A placa sanduíche com material piezelétrico usando FSDT possui as variáveis incógnitas de deslocamento mecânico,  $\vec{u}_e(x, y) = \{u(x, y), v(x, y), w(x, y), \theta_x(x, y), \theta_y(x, y)\}$ , e de potencial elétrico,  $\vec{\phi}_e = \{\phi^{(1)}, \phi^{(3)}\}$  sendo as últimas constantes no plano da placa. Na formulação isoparamétrica as variáveis mecânicas são interpoladas em termos dos deslocamentos nodais,  $u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ , usando as mesmas funções (3.140) usadas para interpolar a geometria, isto é,

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) u_i \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) v_i \\ w(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) w_i \\ \theta_x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \theta_{xi} \\ \theta_y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \theta_{yi} \end{aligned} \quad (3.141)$$

Alguns autores incluem o potencial elétrico como variável nodal na discretização por elementos finitos (TZOU e TSENG, 1990; FERNANDES e POUGET, 2001; NG *et al.* 2002). Contudo, conforme a eletrostática, o potencial elétrico em placas paralelas é assumido constante no plano da placa. Neste caso, definir potenciais elétricos nodais resulta em GL extras que devem ser reduzidos a um único GL mestre. Este método pode ocasionar interpretações não adequadas da condição de potencial elétrico. Este motivo nos leva a definir GL elétricos vinculados ao elemento, e não aos nós. Este método vem sendo utilizado por autores mais recentes (LEE *et al.* 2002; ABREU 2004; AHMAD *et al.* 2006). Assim, para placa sanduíche tem-se  $\phi_o^{(1)}$  e  $\phi_o^{(3)}$  os potenciais elétricos na face inferior e superior do elemento e, como os potenciais elétricos na superfície são constantes, podem ser definidos,

$$\begin{aligned}\phi^{(1)}(\xi, \eta) &= \phi_o^{(1)} \\ \phi^{(3)}(\xi, \eta) &= \phi_o^{(3)}\end{aligned}\tag{3.142}$$

Montando o vetor mecânico de deslocamentos nodais e o vetor elétrico de potenciais elétricos elementar,

$$\begin{aligned}\vec{q}_u^T &= \{u_1, v_1, w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, u_2, v_2, \dots, w_9, \theta_{x_9}, \theta_{y_9}\}_{45 \times 1} \\ \vec{q}_\phi^T &= \{\phi_o^{(1)}, \phi_o^{(3)}\}_{2 \times 1}\end{aligned}\tag{3.143}$$

as relações em (3.141) e (3.142) podem ser expostas na forma matricial,

$$\begin{aligned}\vec{u}_e(\xi, \eta) &= [\mathbf{N}_u(\xi, \eta)]_{5 \times 45} \{\vec{q}_u\}_{45 \times 1} \\ \vec{\phi}_e &= [\mathbf{N}_\phi]_{2 \times 2} \{\vec{q}_\phi\}_{2 \times 1}\end{aligned}\tag{3.144}$$

em que as matrizes de interpolação são assim definidas,

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_u(\xi, \eta) &= [\mathbf{N}_1 \mid \mathbf{N}_2 \mid \dots \mid \mathbf{N}_9]_{5 \times 45} \\ \mathbf{N}_\phi &= \mathbf{I}_{2 \times 2}\end{aligned}\tag{3.145}$$

sendo  $\mathbf{I}$  uma matriz identidade de segunda ordem e  $\mathbf{N}_i$  definida, pelas funções de forma (3.140), como:



$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}, \text{ para } i = 1 \dots 9 \quad (3.146)$$

### 3.5.2 Variáveis de Campo Mecânico em Coordenadas Paramétricas

O vetor de deformações generalizadas é definido em termos das derivadas parciais do deslocamento em relação às coordenadas  $x$  e  $y$ , i.e.

$$\vec{\varepsilon}_g = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \\ \theta_x(x, y) \\ \theta_y(x, y) \end{Bmatrix} \quad (3.147)$$

Contudo, usando a parametrização, a função  $\mathbb{N} \rightarrow f(\xi, \eta)$  não pode ser derivada diretamente, sendo necessário usar a regra da cadeia para obter as derivadas em termos de  $\xi$  e  $\eta$ . Dessa forma, é introduzido o conceito de Jacobiano  $[\mathbf{J}]$ ,

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix} \quad (3.148)$$

sendo  $[\mathbf{J}]$  dado por,

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum N_{i,\xi} x_i & \sum N_{i,\xi} y_i \\ \sum N_{i,\eta} x_i & \sum N_{i,\eta} y_i \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

Usando o Jacobiano e derivando as funções de forma nas coordenadas paramétricas é possível chegar a  $\mathbb{B}_u \rightarrow f(\xi, \eta)$ , matriz de interpolação das deformações em função

das coordenadas paramétricas. Detalhes da obtenção de  $\mathbb{B}_u$  podem ser encontrados em Cook *et al* (2002). O resultado obtido para  $\mathbb{B}_u(\xi, \eta)$  é:

$$[\mathbb{B}_u(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(B_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(B_2) \\ 0 & 0 & 0 & -(B_2) & -(B_1) \\ 0 & 0 & B_2 & 0 & -N_i \\ 0 & 0 & B_1 & -N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

em que são definidos os termos,

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\det(\mathbf{J})} (J_{22}N_{i,\xi} - J_{12}N_{i,\eta}) \\ B_2 &= \frac{1}{\det(\mathbf{J})} (-J_{21}N_{i,\xi} + J_{11}N_{i,\eta}) \end{aligned} \quad (3.151)$$

em que  $J_{ij}$  é componente da matriz jacobiano  $\mathbf{J}$ .

Dessa forma, o vetor de deformações generalizadas passa a ser representado pelos deslocamentos nodais, na forma:

$$\vec{\mathcal{E}}_g(\xi, \eta) = [\mathbb{B}_u(\xi, \eta)]_{8 \times 45} \{\vec{q}_u\}_{45 \times 1} \quad (3.152)$$

### 3.5.3 Variáveis de Campo Elétrico em Coordenadas Paramétricas

A variável elétrica, interpolada linearmente em função da coordenada  $z$ , é considerada na Seção 3.1.4, resultando na hipótese (3.29). Como o potencial elétrico é constante no plano do elemento, a relação entre o campo elétrico e o potencial elétrico não contém as derivadas parciais de  $xy$ , tornando desnecessário o uso do jacobiano para representar o campo elétrico em coordenadas paramétricas. A relação cinemática do campo elétrico definida em (3.30), e exposta no formato de camadas discretas de acordo com (3.74), é:

$$\vec{E} = \begin{Bmatrix} \vec{E}^{(1)} \\ \vec{E}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{h_{pzt}^{(1)}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h_{pzt}^{(3)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_o^{(1)} \\ \phi_o^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3.153)$$

Assim a matriz  $\mathbb{B}_\phi \rightarrow f(const.)$  para o grau de liberdade elétrico é,

$$[\mathbb{B}_\phi] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{h_{pzt}^{(1)}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_{pzt}^{(3)}} \end{bmatrix}_{6 \times 2} \quad (3.154)$$

e o campo elétrico é interpolado como,

$$\vec{E} = -[\mathbb{B}_\phi] \vec{q}_\phi \quad (3.155)$$

A definição entre atuador e sensor é estabelecida pelas condições de contorno impostas no elemento.

#### 3.5.4 Determinação das Matrizes de Equilíbrio Elementares

A formulação fraca para o problema piezelétrico foi obtida na Seção 3.4.1. A equação constitutiva do problema piezelétrico foi usada na Seção 3.4.2 para deixar a forma fraca em função das variáveis de deslocamento, potencial elétrico e as respectivas variáveis de campo. Ainda na Seção 3.4.2, o domínio de integração do problema foi reduzido ao domínio de área da placa.

Nesta seção, as integrais de 1 a 8 obtidas na Seção 3.4.2 serão resolvidas usando as definições isoparamétricas relacionadas acima. Deseja-se com isto expressar as integrais

em termos dos graus de liberdade nodais e resolver as integrais no domínio de integração elementar.

As duas equações obtidas na forma fraca são agora determinadas no domínio do elemento  $\Omega_e$  após a discretização:

$$\underbrace{\int_{\Omega_e} \rho \ddot{u} \cdot \delta \bar{u} d\Omega_e}_1 + \underbrace{\int_{\Omega_e} \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{\varepsilon} d\Omega_e}_2 = \underbrace{\int_{\Omega_e} \rho \vec{g} \cdot \delta \bar{u} d\Omega_e}_3 + \underbrace{\int_{\partial\Omega_{te}} \vec{t} \cdot \delta \bar{u} d\Gamma_{te}}_4 + \underbrace{\vec{F}_p \cdot \delta \bar{u}}_5$$

$$\underbrace{\int_{\Omega_e} (\vec{D} \cdot \delta \vec{E}) d\Omega_e}_6 = \underbrace{\int_{\partial\Omega_{be}} \varrho \delta \phi d\Gamma_{be}}_7 + \underbrace{Q \delta \phi}_8 \quad (3.156)$$

1 - Termo da parcela dinâmica:

O resultado obtido com a parcela dinâmica na Seção 3.4.2 foi,

$$\int_{\Omega_e} \rho \ddot{u} \cdot \delta \bar{u} d\Omega_e = \int_{A_e} I_1(\ddot{u}_0 \cdot \delta \bar{u}_0) dA_e - \int_{A_e} I_2(\ddot{u}_0 \cdot \delta \vec{\theta} + \vec{\theta} \cdot \delta \ddot{u}_0) dA_e + \int_{A_e} I_3(\vec{\theta} \cdot \delta \vec{\theta}) dA_e \quad (3.157)$$

Seja o vetor de deslocamentos axiais  $\ddot{u}_0$  e o vetor de rotações  $\vec{\theta}$  resultantes da transformação no vetor de deslocamentos mecânicos nodais do elemento,

$$\begin{aligned} \ddot{u}_0 &= [T_u] \ddot{u}_e(\xi, \eta) = [T_u]_{3 \times 5} [\mathbb{N}_u(\xi, \eta)]_{5 \times 45} \{\vec{q}_u\}_{45 \times 1} \\ \vec{\theta} &= [T_\theta] \vec{u}_e(\xi, \eta) = [T_\theta]_{3 \times 5} [\mathbb{N}_u(\xi, \eta)]_{5 \times 45} \{\vec{q}_u\}_{45 \times 1} \end{aligned} \quad (3.158)$$

em que as matrizes de transformação são dadas por

$$[T_u] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [T_\theta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

Usando (3.158) em (3.157) e operando adequadamente, obtém-se:

$$\int_{\Omega_e} \rho \ddot{u} \cdot \delta \bar{u} d\Omega_e = \int_{A_e} [\mathbb{N}_u]^T \left( \begin{aligned} &[T_u]^T I_1 [T_u] - \\ &[T_\theta]^T I_2 [T_u] - [T_u]^T I_2 [T_\theta] + \\ &[T_\theta]^T I_3 [T_\theta] \end{aligned} \right) [\mathbb{N}_u] \vec{q}_u \cdot \delta \vec{q}_u dA_e \quad (3.160)$$

Concatenando todos os termos de transformação e inércia em (3.160) tem-se,

$$[\mathbf{I}_m] = [T_u]^T I_1 [T_u] - [T_\theta]^T I_2 [T_u] - [T_u]^T I_2 [T_\theta] + [T_\theta]^T I_3 [T_\theta] \quad (3.161)$$

E, resolvendo, obtém-se:

$$[\mathbf{I}_m] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & -I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & -I_2 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 \\ -I_2 & 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & -I_2 & 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

Assim, conclui-se a parcela de inércia na seguinte forma,

$$\int_{\Omega_e} \rho \ddot{u} \cdot \delta \ddot{u} d\Omega_e = \int_{A_e} [\mathbf{N}_u]^T [\mathbf{I}_m] [\mathbf{N}_u] dA_e \{ \ddot{q}_u \} \cdot \{ \delta \ddot{q}_u \} \quad (3.163)$$

O que permite escrever a matriz de massa elemental na equação (3.163) na forma matricial como:

$$\mathbb{M} = \int_{A_e} [\mathbf{N}_u]^T [\mathbf{I}_m] [\mathbf{N}_u] dA_e \quad (3.164)$$

e a parcela dinâmica pode ser escrita em função dos graus de liberdade nodal por,

$$\boxed{[\mathbb{M}] \{ \ddot{q}_u \} \cdot \{ \delta \ddot{q}_u \}} \quad (3.165)$$

2 - Termo das forças de equilíbrio interno:

O termo relacionado às forças de corpo conservativas é definido na Seção 3.4.2 como,

$$\int_{\Omega_e} \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{\varepsilon} d\Omega_e = \int_{A_e} [\mathbb{D}] \vec{\varepsilon}_g \cdot \delta \vec{\varepsilon}_g - [\mathbb{E}]^T \vec{E} \cdot \delta \vec{\varepsilon}_g dA_e \quad (3.166)$$

Usando a interpolação,

$$\int_{\Omega_e} \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{\varepsilon} d\Omega_e = \int_{A_e} [\mathbb{B}_u]^T [\mathbb{D}] [\mathbb{B}_u] \vec{q}_u \cdot \delta \vec{q}_u + [\mathbb{B}_u]^T [\mathbb{E}]^T [\mathbb{B}_\phi] \vec{q}_\phi \cdot \delta \vec{q}_u dA_e \quad (3.167)$$

em que, pode-se definir as matrizes de rigidez mecânica e eletro-mecânica na forma,

$$\begin{aligned} [\mathbb{K}_{uu}] &= \int_{A_e} [\mathbb{B}_u]^T [\mathbb{D}] [\mathbb{B}_u] dA_e \\ [\mathbb{K}_{u\phi}] &= \int_{A_e} [\mathbb{B}_u]^T [\mathbb{E}]^T [\mathbb{B}_\phi] dA_e \end{aligned} \quad (3.168)$$

e a parcela de forças de corpo interna é escrita como,

$$\left( [\mathbb{K}_{uu}] \{ \vec{q}_u \} + [\mathbb{K}_{u\phi}] \vec{q}_\phi \right) \cdot \{ \delta \vec{q}_u \} \quad (3.169)$$

3 - Termo da força de corpo gravitacional:

Tem-se:

$$\int_{\Omega_e} \rho \vec{g} \cdot \delta \vec{u} d\Omega_e = \int_{A_e} I_1 (\vec{g} \cdot \delta \vec{u}_0) dA_e - \int_{A_e} I_2 (\vec{g} \cdot \delta \vec{\theta}) dA_e \quad (3.170)$$

e, usando novamente as definições (3.158) e (3.159), chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \rho \vec{g} \cdot \delta \vec{u} d\Omega_e &= \int_{A_e} I_1 \vec{g} \cdot [T_u] [\mathbb{N}_u] \delta \vec{q}_u - I_2 \vec{g} \cdot [T_\theta] [\mathbb{N}_u] \delta \vec{q}_u dA_e \\ &= \int_{A_e} I_1 [\mathbb{N}_u]^T [T_u]^T \vec{g} - I_2 [\mathbb{N}_u]^T [T_\theta]^T \vec{g} dA_e \cdot \{ \delta \vec{q}_u \} \\ &= \int_{A_e} [\mathbb{N}_u]^T \left( I_1 [T_u]^T - I_2 [T_\theta]^T \right) \vec{g} dA_e \cdot \{ \delta \vec{q}_u \} \end{aligned} \quad (3.171)$$

em que se pode concatenar o termo da matriz de transformação incluindo as constantes de inércia, na forma:

$$[\mathbf{I}_g] = \left( I_1 [T_u]^T - I_2 [T_\theta]^T \right) = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \\ -I_2 & 0 & 0 \\ 0 & -I_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.172)$$

Considerando a aceleração gravitacional, tem-se o vetor de força gravitacional:

$$\vec{F}_g = [\mathbf{I}_g] \vec{g} = \begin{Bmatrix} I_1 g_x \\ I_1 g_y \\ I_1 g_z \\ -I_2 g_x \\ -I_2 g_y \end{Bmatrix} \quad (3.173)$$

e, assim, o vetor de força gravitacional elementar é escrito na forma:

$$\vec{F}_e^g = \int_{A_e} [\mathbb{N}_u]^T \vec{F}_g dA_e \quad (3.174)$$

sendo que a parcela devida às forças gravitacionais é:

$$\boxed{\vec{F}_e^g \cdot \{\delta \vec{q}_u\}} \quad (3.175)$$

4 - Termo de carregamento prescrito no contorno:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} d\Gamma_t &= \int_{S_t} [R] \vec{\bar{N}} \cdot \delta \vec{u}_0 - [R] \vec{\bar{M}} \cdot \delta \vec{\theta} dS_t + \int_{A_t} \vec{\bar{q}} \cdot \delta \vec{u}_0 dA_t \\ &= \int_{\partial A_t} [\mathbb{N}_u]^T [R] \left\{ \begin{Bmatrix} \vec{\bar{N}} \\ \vec{\bar{M}} \end{Bmatrix} \right\} dS_t \cdot \{\delta \vec{q}_u\} + \int_{A_t} [\mathbb{N}_u]^T \vec{\bar{q}} dA_t \cdot \{\delta \vec{q}_u\} \end{aligned} \quad (3.176)$$

em que se identifica,

$$\vec{F}_e^m = \int_{\partial A_t} [\mathbb{N}_u]^T [R] \left\{ \begin{Bmatrix} \vec{\bar{N}} \\ \vec{\bar{M}} \end{Bmatrix} \right\} dS_t + \int_{A_t} [\mathbb{N}_u]^T \vec{\bar{q}} dA_t \quad (3.177)$$

Assim, coloca-se a parcela de forças mecânicas na forma,

$$\vec{F}_e^m \cdot \{\delta \vec{q}_u\} \quad (3.178)$$

5 - Termo do carregamento prescrito pontual:

$$\vec{F}_p \cdot \delta \vec{u} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \delta \vec{u}_0 - z \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \delta \vec{\theta} \quad (3.179)$$

Sendo a força aplicada nos pontos nodais, pode-se colocar (3.179) na forma,

$$\vec{F}_p \cdot \delta \vec{u} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{F}_x \\ \bar{F}_y \\ \bar{F}_z \\ \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \end{array} \right\} \delta \vec{q}_u \quad (3.180)$$

6 - Termo da força exercida pelo campo elétrico:

Na parcela relativa ao campo elétrico, Eq. (3.156), usa-se a aproximação dada pela forma (3.154). Assim, resolve-se a equação como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} (\vec{D} \cdot \delta \vec{E}) d\Omega &= \int_{A_e} ([\mathbb{E}] \vec{\varepsilon}_g + [\mathbb{J}] \vec{E}) \cdot \delta \vec{E} d\Omega_e \\ &= \int_{A_e} \left( -[\mathbb{B}_\phi]^T [\mathbb{E}] [\mathbb{B}_u] \vec{q}_u + [\mathbb{B}_\phi]^T [\mathbb{J}] [\mathbb{B}_\phi] \vec{q}_\phi \right) d\Omega_e \cdot \{\delta \vec{q}_\phi\} \\ &= \left( -\int_{A_e} [\mathbb{B}_\phi]^T [\mathbb{E}] [\mathbb{B}_u] d\Omega_e \vec{q}_u + \int_{A_e} [\mathbb{B}_\phi]^T [\mathbb{J}] [\mathbb{B}_\phi] d\Omega_e \vec{q}_\phi \right) \cdot \{\delta \vec{q}_\phi\} \end{aligned} \quad (3.181)$$

em que se identificam as matrizes,

$$\begin{aligned} [\mathbb{K}_{\phi u}] &= \int_{A_e} [\mathbb{B}_\phi]^T [\mathbb{E}] [\mathbb{B}_u] d\Omega_e \\ [\mathbb{K}_{\phi\phi}] &= \int_{A_e} [\mathbb{B}_\phi]^T [\mathbb{J}] [\mathbb{B}_\phi] d\Omega_e \end{aligned} \quad (3.182)$$

colocando a equação na forma,

$$\boxed{\left( -[\mathbb{K}_{\phi u}] \vec{q}_u + [\mathbb{K}_{\phi\phi}] \vec{q}_\phi \right) \cdot \{\delta \vec{q}_\phi\}} \quad (3.183)$$

7 - Resolvendo a parcela de carga elétrica prescrita:



$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_e} \varrho \delta\phi(x, y, z) d\Gamma_e &= \int_{\partial A} \left\{ \begin{matrix} \varrho^{(1)} \\ \varrho^{(3)} \end{matrix} \right\} \cdot \delta \left\{ \begin{matrix} \phi_o^{(1)} \\ \phi_o^{(3)} \end{matrix} \right\} dA_e \\
&= \int_{\partial A} [\mathbb{N}_\phi]^T \left\{ \begin{matrix} \varrho^{(1)} \\ \varrho^{(3)} \end{matrix} \right\} dA_e \cdot \delta q_\phi
\end{aligned} \tag{3.184}$$

Assim posto, define-se os vetores de carga elétrica no contorno na forma:

$$\vec{F}_e^\varrho = \int_{\partial A} [\mathbb{N}_\phi]^T \left\{ \begin{matrix} \varrho^{(1)} \\ \varrho^{(3)} \end{matrix} \right\} dA_e \tag{3.185}$$

e a parcela de força na formulação devido à carga elétrica pode ser escrita como:

$$\vec{F}_e^\varrho \cdot \{\delta \vec{q}_\phi\} \tag{3.186}$$

Concluída a resolução de todos os termos da formulação fraca, o sistema dinâmico pode ser escrito somando-se os resultados de 1 a 7 anteriores resultando em,

$$\begin{aligned}
([\mathbb{M}] \ddot{\vec{q}}_u + [\mathbb{K}_{uu}] \vec{q}_u + [\mathbb{K}_{u\phi}] \vec{q}_\phi) \cdot \{\delta \vec{q}_u\} &= (\vec{F}_e^g + \vec{F}_e^m) \cdot \{\delta \vec{q}_u\} \\
(-[\mathbb{K}_{\phi u}] \vec{q}_u + [\mathbb{K}_{\phi\phi}] \vec{q}_\phi) \cdot \{\delta \vec{q}_\phi\} &= \vec{F}_e^\varrho \cdot \{\delta \vec{q}_\phi\} \\
\forall \quad \delta \vec{q}_u &\in \mathcal{Var}_u, \quad \delta \vec{q}_\phi \in \mathcal{Var}_\phi
\end{aligned} \tag{3.187}$$

A equação (3.187) deve ser válida para toda variação pertencente ao conjunto das variações,  $\mathcal{Var}$ , definido em (3.106), o que leva a:

$$\begin{aligned}
[\mathbb{M}] \ddot{\vec{q}}_u + [\mathbb{K}_{uu}] \vec{q}_u + [\mathbb{K}_{u\phi}] \vec{q}_\phi &= \vec{F}_e^g + \vec{F}_e^m \\
-[\mathbb{K}_{\phi u}] \vec{q}_u + [\mathbb{K}_{\phi\phi}] \vec{q}_\phi &= \vec{F}_e^\varrho
\end{aligned} \tag{3.188}$$

Assim, tem-se um sistema de equações diferenciais em que as matrizes desse sistema são definidas na forma integral em termos do domínio de área do elemento. Calculadas todas as matrizes elementares, é realizado um procedimento de montagem do sistema global, este, representando todo o domínio da estrutura. Os cálculos das matrizes elementares são feitos de forma computacional em coordenadas paramétricas através da integração numérica (ver Apêndice A).

### 3.5.5 Montagem do Sistema Global

Uma vez determinadas as matrizes elementares do sistema, torna-se necessária a montagem dessas matrizes no sistema global de equações. Os graus de liberdade,  $\vec{q}_u^{(k)}$  e  $\vec{q}_\phi^{(k)}$ , do elemento  $k$  estão relacionados aos graus de liberdade globais  $\vec{U}$  e  $\vec{\Phi}$  através das matrizes de transformação  $[T_U]^{(k)}$  e  $[T_\Phi]^{(k)}$ :

$$\begin{aligned}\vec{q}_u^{(k)} &= [T_U]^{(k)} \vec{U} \\ \vec{q}_\phi^{(k)} &= [T_\Phi]^{(k)} \vec{\Phi}\end{aligned}\tag{3.189}$$

O elemento  $ij$  da matriz  $[T_U]^{(k)}$  é 1 para o todo  $i$ -ésimo grau de liberdade mecânico do elemento  $k$  correspondente ao  $j$ -ésimo grau de liberdade mecânico global. O elemento  $ij$  da matriz  $[T_\Phi]^{(k)}$  é 1 para o todo  $i$ -ésimo grau de liberdade elétrico do elemento  $k$  correspondente ao  $j$ -ésimo grau de liberdade elétrico global. Dessa forma permite-se montar as matrizes globais:

$$\begin{aligned}[M] &= \sum_k [T_U^{(k)}]^T [\mathbb{M}^{(k)}] [T_U^{(k)}] \\ [K_{uu}] &= \sum_k [T_U^{(k)}]^T [\mathbb{K}_{uu}^{(k)}] [T_U^{(k)}] \\ [K_{\phi u}] &= \sum_k [T_\Phi^{(k)}]^T [\mathbb{K}_{\phi u}^{(k)}] [T_U^{(k)}] \\ [K_{\phi\phi}] &= \sum_k [T_\Phi^{(k)}]^T [\mathbb{K}_{\phi\phi}^{(k)}] [T_\Phi^{(k)}] \\ [K_{u\phi}] &= [K_{\phi u}]^T \\ \{F\} &= \sum_k [T_U^{(k)}]^T \left( \{F_{(k)}^g\} + \{F_{(k)}^m\} \right) \\ \{Q\} &= \sum_k [T_\Phi^{(k)}]^T \{F_{(k)}^g\}\end{aligned}\tag{3.190}$$

Finalmente tem-se o sistema global de equação para o sistema acoplado piezelétrico,

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{\Phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ -K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix}\tag{3.191}$$

Esta seção propõe o uso do método dos elementos finitos para montar o problema dinâmico para placas estruturais com piezelétricos colados na superfície na forma discreta. A equação (3.191) representa este sistema discreto. O problema pode ser considerado estático no que se refere à parte elétrica do sistema e dinâmico na parcela mecânica, contudo, a parcela dinâmica da equação deve levar em consideração o acoplamento piezelétrico.

A solução dinâmica pode usar os métodos de integração direta, o método de superposição modal, ou uma combinação dos dois. O método de superposição é escolhido nesta dissertação e será tratado no próximo capítulo.

É importante notar que, excluindo-se a matriz de massa da Eq. (3.191), chega-se à equação estática do problema. A equação resultante pode ser resolvida por qualquer método de solução de sistemas lineares (por exemplo, método de Gauss), desde que as condições de contorno sejam adequadamente postas, tal que a matriz de rigidez seja não singular. Procedimentos de solução podem ser encontrados em qualquer literatura de método dos elementos finitos, independente de tratar do problema acoplado ou não. Sugere-se Bathe e Wilson (1976), Cook *et al.* (2002), Soriano (2003) e Alves Filho (2000).



## **CAPÍTULO 4**

### **SOLUÇÃO DINÂMICA DO PROBLEMA ACOPLADO**

Quando uma carga aplicada a uma estrutura é variante no tempo, a resposta da estrutura também se torna variante no tempo. O deslocamento, ou resposta, da estrutura sujeita a um carregamento dinâmico pode ser maior ou menor que a resposta obtida para um carregamento estático de mesma magnitude. O estudo de uma estrutura com resposta variante no tempo é realizado pela dinâmica. Em termos gerais, podem-se determinar duas linhas de estudo da dinâmica com relação às vibrações mecânicas, estas são: Sistemas determinísticos e sistemas probabilísticos (Aleatórios). Os sistemas determinísticos ramificam-se em duas vertentes, a de excitação periódica e a não periódica. Pode-se dizer que o principal exemplo de carregamento periódico são as funções harmônicas, ao passo que para os carregamentos não periódicos são as respostas transitórias devidas às condições iniciais

Este capítulo visa determinar a resposta de um sistema dinâmico para carregamentos harmônicos sujeito a transitório devido a condições iniciais. Para tal, faz-se o uso do método de análise modal do sistema.

A análise modal consiste em determinar as frequências e formas modais de vibração natural de uma estrutura. A determinação destes parâmetros consiste na solução de um problema de autovalor, proveniente da equação de movimento livre e não amortecida da estrutura. No que diz respeito ao projeto de uma estrutura, é desejável obter as frequências naturais adequadamente espaçadas e longe das frequências das fontes de perturbação. Posto isto, o conhecimento das características modais torna-se um importante instrumento de projeto do sistema.

Um carregamento periódico pode ser decomposto na forma harmônica de senos e cossenos usando, por exemplo, a técnica de séries de Fourier. Realizada a decomposição da força de excitação, busca-se a solução harmônica para cada frequência de entrada do sistema. A resposta global do sistema é resultante da superposição das respostas, desde que o sistema seja linear. O método de superposição modal é o método proposto aqui para resolver o sistema de equações diferenciais acopladas, Eq. (3.191), tanto no que se refere ao regime permanente quanto ao transitório devido às condições iniciais.

#### **4.1 Análise modal**

Neste tópico, a equação dinâmica na forma discreta, equação (3.191), será transformada do espaço de coordenadas físico para o espaço modal. Com esta transformação pretende-se eliminar a interdependência das equações no sistema.

O objetivo final consiste não somente em obter a solução dinâmica do problema, mas também apresentar um modelo que seja adequado ao projeto de controladores. Neste âmbito, cumpre-se tecer uma breve consideração sobre as condições de contorno elétricas e suas relações com um projeto experimental real.

#### 4.1.1 Condição de Contorno Elétrica

No que se refere às condições de contorno elétricas, Piefort (2001) descreve três classes possíveis, estas são: eletrodos controlados por voltagem (circuito-fechado), eletrodos controlados por carga (circuito-aberto) e, eletrodos conectados a um circuito elétrico passivo.

Na primeira condição tem-se um potencial elétrico prescrito, i.e.  $\phi$  é conhecido. Este é o caso dos sensores, quando conectados a um amplificador de carga, e também dos atuadores, quando ligados a um amplificador de potência.

Na segunda condição, as cargas elétricas aplicadas no sistema são prescritas. Na prática sistemas elétricos que controlam cargas são desconhecidos pelo autor. Contudo esta situação é possível quando os eletrodos estão em circuito aberto, ou seja, não conectados a um sistema. Em circuito aberto as cargas elétricas livres no sistema são nulas ( $Q = 0$ ) e um potencial elétrico aparente é gerado no piezelétrico.

A terceira condição diz respeito a um piezelétrico ligado a um circuito passivo de impedância  $Z$ , neste caso a condição de contorno é dependente do tempo visto que a corrente do sistema é escrita pela derivada da carga,  $I = \dot{Q}$ .

Neste trabalho serão considerados os sistemas ligados em curto circuito e circuito aberto em que serão avaliadas as frequências de ressonância e modos de vibração para cada tipo de sistema. Como estratégia de solução inicialmente deve-se identificar as variáveis de entrada e saída do sistema de controle; o que pode ser visto na Tabela 4. Nota-se que a variável elétrica assume diferente papel, do ponto de vista do controle, para o sistema elétrico em circuito aberto e em circuito fechado.

Tabela 4 – Relação de entradas e saídas para cada tipo de circuito.

|                  | <i>Variáveis de entrada</i> | <i>Variáveis de saída</i> |
|------------------|-----------------------------|---------------------------|
| Circuito fechado | $\phi, F$                   | $Q, U$                    |
| Circuito Aberto  | $Q, F$                      | $\phi, U$                 |

Em **circuito aberto**, o sistema pode ser representado pela Eq. (3.191), repetida a seguir:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{\Phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ -K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Em **circuito fechado**, o sistema é obtido pela manipulação algébrica da Eq. (4.1). Dessa forma é possível obter as variáveis de saída  $U$  e  $Q$  no lado esquerdo da equação e as variáveis de saída  $F$  e  $\Phi$  do lado direito, o que resulta em,

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{Q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_{uu} + K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u}) & K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} \\ K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} & K_{\phi\phi}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ \Phi \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

No item a seguir será analisado o sistema em circuito aberto, Eq. (4.1). Posteriormente será analisado o sistema em circuito fechado, Eq. (4.2).

#### 4.1.2 Análise Modal para o Sistema em Circuito Aberto

A análise modal consiste no problema de autovalor aplicado ao sistema dinâmico de vibração mecânica. Vários outros problemas físicos fazem uso do processo de autovalor como solução, como por exemplo, na transferência de calor ou na flambagem de vigas. Assim sendo, seja a equação diferencial do sistema piezelétrico em circuito aberto, não amortecido, e livre é escrito abaixo na forma:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ -K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Este sistema pode ser imediatamente comparado a um sistema puramente mecânico (ver Apêndice B) quando agrupados os graus de liberdade elétricos e mecânicos da Eq. (4.3) em um único vetor,

$$[M^*] \{\ddot{U}^*\} + [K^*] \{U^*\} = \{0\} \quad (4.4)$$

Duas observações devem ser feitas em relação às propriedades das matrizes. A primeira é com relação à matriz de massa no sistema (4.3) devido aos seus elementos nulos na diagonal principal, o que torna a matriz de massa semidefinida positiva. A segunda observação é com relação à matriz de rigidez que passa a ser assimétrica devido ao negativo

na parcela de acoplamento. Contudo, antes de discutir sobre estas duas observações, a discretização do problema no espaço modal é rapidamente posta a seguir,

$$\{U^*(t)\} = \begin{Bmatrix} U(t) \\ \Phi(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\phi \end{bmatrix} \{\bar{\xi}(t)\} \quad (4.5)$$

Note-se que cada vetor modal na matriz de modos possui uma parte devida aos deslocamentos e outra devida ao grau de liberdade elétrico. Desta forma o vetor de potencial elétrico passa a fazer parte da variável de estado do sistema de forma intrínseca. A matriz de transformação pode ser identificada por  $n$  vetores modais no formato,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\phi}_u \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \vec{\phi}_u \end{Bmatrix} & \cdots & \begin{Bmatrix} \vec{\phi}_u \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \vec{\phi}_\phi \end{Bmatrix}_1 & \begin{Bmatrix} \vec{\phi}_\phi \end{Bmatrix}_2 & \cdots & \begin{Bmatrix} \vec{\phi}_\phi \end{Bmatrix}_n \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Assim o problema de autovalor do sistema (4.3) é escrito como: determinar os autovetores,  $\Phi$  e os autovalores,  $\Lambda = \text{diag}(\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\})$ , tal que a relação,

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ -K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\phi \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\phi \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

seja satisfeita.

Posto o problema de autovalor, volta-se a tratar das duas observações feitas anteriormente sobre o sistema em (4.4), e agora exposto na forma de auto-problema em (4.7). De imediato, pode-se dizer que  $\lambda_k = \infty$  é uma das soluções para o  $k$ -ésimo elemento nulo da diagonal principal da matriz de massa generalizada representado no problema de autovalor definido em (4.7). O autovetor correspondente a este autovalor é o vetor normal  $\varphi_k = \{0 \cdots 0 \quad 1 \quad 0 \cdots 0\}^T$ , em que a unidade ocupa o lugar correspondente a  $k$ -ésima linha do vetor. O problema gerado é que a matriz de autovetores  $\Phi$  não pode ser determinada usando a condição de ortonormalidade pela massa (BATHE e WILSON, 1976). Isto exige que os graus de liberdade com elementos de massa nulos, i.e. graus de liberdade elétricos, sejam eliminados do problema de autovalor. Um procedimento muito conhecido é o processo de condensação estática (ou redução de *Guyan*), usada pra reduzir o número de graus de liberdade do sistema. O procedimento é descrito a seguir.



A condensação estática consiste em por os graus de liberdade principais, neste caso  $\Phi_u$ , em função dos graus de liberdade a serem reduzidos, ou seja,  $\Phi_\phi$ . Assim, operando a segunda linha da matriz de rigidez no sistema (4.7) tem-se a relação,

$$\Phi_\phi = K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} \Phi_u \quad (4.8)$$

Levando a relação (4.8) à Eq. (4.7), e realizando a operação matricial, as parcelas relativas ao grau de liberdade elétrico são incorporadas na matriz de rigidez eliminando-se os termos nulos da matriz de massa,

$$\left( K_{uu} + K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} \right) \Phi_u = \lambda M \Phi_u \quad (4.9)$$

Definindo o termo de rigidez global,

$$K_g = K_{uu} + K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} \quad (4.10)$$

nota-se que a rigidez da estrutura é aumentada pela rigidez piezelétrica. O capítulo de resultados avalia este acréscimo de rigidez. Contudo, de antemão, adianta-se que este acréscimo é pouco significativo devido aos valores muito pequenos das constantes de piezeletricidade em comparação com o módulo de elasticidade.

Usando (4.9) e (4.10) o problema de autovalor para o sistema piezelétrico em circuito aberto é escrito como,

$$\left( K_g - \lambda M \right) \Phi_u = 0 \quad (4.11)$$

O problema é então resolvido seguindo o procedimento e as propriedades descritos no Apêndice A. Os resultados são os autopares  $(\lambda_i, \varphi_i)$  e a solução completa inclui os autopares  $(\infty, \varphi_k)$  correspondentes ao  $k$ -ésimo elemento nulo na diagonal principal da matriz de massa. Nota-se ainda que o problema da não simetria da matriz de rigidez é automaticamente resolvido na condensação estática, visto que o produto  $K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u}$  é simétrico.

#### 4.1.3 Análise Modal para o Sistema em Circuito Fechado

A equação dinâmica livre do sistema, para piezelétricos em circuito fechado, é assim escrita:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{\Phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_{uu} + K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u}) & K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} \\ K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} & K_{\phi\phi}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

O vetor de graus liberdade do sistema pode ser discretizado no espaço modal na forma:

$$\{U^*(t)\} = \begin{Bmatrix} U(t) \\ Q(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\phi \end{bmatrix} \{\vec{\xi}(t)\} \quad (4.13)$$

Observa-se que nesta nova representação a saída do sistema, i.e. carga elétrica, passa a fazer parte do sistema de coordenadas modal. O problema de autovalor pode então ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} (K_{uu} + K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u}) & K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} \\ K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} & K_{\phi\phi}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\phi \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\phi \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Usando o processo de condensação estática obtém-se a relação

$$\Phi_\phi = -K_{\phi u} \Phi_u \quad (4.15)$$

Levando esta relação à Eq. (4.14),

$$(K_{uu} + K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u}) \Phi_u - K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} \Phi_u = \Lambda M \Phi_u \quad (4.16)$$

que simplifica para o problema de autovalor mecânico puro,

$$(K_{uu} - \lambda M) \Phi_u = 0 \quad (4.17)$$

Conclui-se que o sistema piezelétrico em circuito fechado não interfere nos modos de vibração e frequências naturais do sistema mecânico.

#### 4.1.4 Equação Dinâmica para Circuito Fechado em Coordenadas Modais

O foco de interesse consiste dos sistemas em circuito fechado, em que é possível o controle ativo do sistema usando circuitos eletrônicos. Assim sendo, a equação dinâmica

(4.2), reescrita no sistema de coordenada modal e multiplicada em toda a extensão pela transposta dos modos de vibração, fornece:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\phi \end{bmatrix} \left\{ \ddot{\xi}(t) \right\} \\ + \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (K_{uu} + K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u}) & K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} \\ K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} & K_{\phi\phi}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\phi \end{bmatrix} \left\{ \ddot{\xi}(t) \right\} = \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_\phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F(t) \\ \Phi(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.18)$$

em que os modos de vibração  $\Phi_u$  são determinados pelo problema exposto em (4.17) e a condensação estática impõe a condição (4.15) para  $\Phi_\phi$ . Os graus de liberdade generalizados,  $\ddot{\xi}(t)$ , contêm intrinsecamente os valores de deslocamento mecânico e cargas elétricas, pela relação (4.13). Definidos todos os termos, realizando a operação matricial (4.18) obtém-se,

$$\begin{aligned} \left[ \Phi_u^T M \Phi_u \right] \left\{ \ddot{\xi}(t) \right\} + \left[ \Phi_u^T K_{uu} \Phi_u + \Phi_u^T (K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} \Phi_u + K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} \Phi_\phi) + \right. \\ \left. + \Phi_\phi^T (K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} \Phi_u + K_{\phi\phi}^{-1} \Phi_\phi) \right] \left\{ \ddot{\xi}(t) \right\} = \Phi_u^T \vec{F}(t) + \Phi_\phi^T \vec{\Phi}(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Em decorrência da condição imposta pela condensação estática, os termos entre parênteses na matriz de rigidez em (4.19) se anulam, resultando em,

$$\left[ \Phi_u^T M \Phi_u \right] \ddot{\xi}(t) + \left[ \Phi_u^T K_{uu} \Phi_u \right] \xi(t) = \Phi_u^T \vec{F}(t) + \Phi_\phi^T \vec{\Phi}(t) \quad (4.20)$$

Sendo possível a transformação de similaridade, tal que os autovetores obtidos no espaço modal sejam normais com relação à matriz de massa, têm-se as condições de ortogonalidade e ortogonalidade,

$$\begin{aligned} \Phi_u^T M \Phi_u &= \delta_{ij} \\ \Phi_u^T K_{uu} \Phi_u &= \lambda_i \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.21)$$

em que  $\delta_{ij}$  é o delta de *Kronecker*. Assim, finalmente, o sistema dinâmico piezelétrico em circuito fechado pode ser escrito na forma canônica,

$$\ddot{\xi}(t) + \text{diag}(\lambda_i) \xi(t) = \vec{R}_u(t) + \vec{R}_\phi(t) \quad (4.22)$$

O sistema (4.22) constitui uma série de equações desacopladas, em que, cada autovalor  $\lambda_i = \omega_i^2$  está associado ao quadrado da frequência de vibração do modo  $i$ .

## 4.2 Considerações sobre Amortecimento

A maioria dos materiais e estruturas possui amortecimento do tipo histerético ou estrutural. O amortecimento histerético não é dependente da frequência; o processo de formação depende das deformações elásticas do material independentemente da velocidade de deformação (CLOUGH e PENZIEN, 1975). Contudo, as complicações matemáticas decorrem da não dependência da frequência no amortecimento histerético. Felizmente, o amortecimento estrutural é normalmente pequeno o suficiente para que seja representado por um amortecimento viscoso proporcional. O amortecimento viscoso proporcional é caracterizado pela forma abaixo:

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (4.23)$$

em que  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes de proporcionalidade que interpolam a matriz de amortecimento usando para tal as matrizes de massa e rigidez.

O procedimento para calcular as constantes de proporcionalidade prossegue da seguinte forma apresentada por Bathe e Wilson (1976). O coeficiente de amortecimento viscoso para a equação dinâmica amortecida para um sistema de um grau de liberdade fornece

$$c/m = 2\zeta\omega_n \text{ e } k/m = \omega_n^2 \quad (4.24)$$

em que,  $\zeta = c/c_c$  é a razão de amortecimento,  $c_c$  é o amortecimento crítico, e  $\omega_n$  é a frequência natural. Assim o amortecimento proporcional pode ser escrito como,

$$2\zeta\omega_n = \alpha + \omega_n^2 \beta \quad (4.25)$$

Os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  são então determinados escolhendo no sistema de múltiplos graus de liberdade dois valores para  $\zeta$  e  $\omega_n$  da estrutura dentro da faixa de interesse do problema. Após determinados estes valores, a equação dinâmica (4.20), incluindo o amortecimento, é dada por:

$$[\Phi_u^T M \Phi_u] \ddot{\xi}(t) + [\Phi_u^T C \Phi_u] \dot{\xi}(t) + [\Phi_u^T K_{uu} \Phi_u] \xi(t) = \Phi_u^T \vec{F}(t) + \Phi_\phi^T \vec{\Phi}(t) \quad (4.26)$$

sujeita às condições de ortogonalidade,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_u^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_u &= \delta_{ij} \\ \boldsymbol{\varphi}_u^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_u &= 2\zeta_i \omega_i \delta_{ij} \\ \boldsymbol{\varphi}_u^T \mathbf{K}_{uu} \boldsymbol{\varphi}_u &= \omega_i^2 \delta_{ij}\end{aligned}\quad (4.27)$$

resultando no sistema canônico,

$$\ddot{\vec{\xi}}(t) + \text{diag}(2\zeta_i \omega_i) \dot{\vec{\xi}}(t) + \text{diag}(\omega_i^2) \vec{\xi}(t) = \vec{R}_u(t) + \vec{R}_\phi(t) \quad (4.28)$$

### 4.3 Solução Harmônica

Na Seção 4.1.3 o sistema dinâmico estrutural com elementos piezelétricos foi modelado usando o espaço modal para representação. O amortecimento proporcional foi acrescentado na Seção 4.2. Como resultado um sistema de equações diferenciais linearmente independentes é gerado, e as coordenadas generalizadas possuem informações intrínsecas do deslocamento mecânico e carga elétrica. A vantagem desse método resulta no fato de que agora é possível resolver cada equação separadamente, como sistemas de um grau de liberdade. Assim, a solução dinâmica para um sistema harmônico será brevemente resumida a seguir. Seja o sistema dinâmico amortecido de um grau de liberdade abaixo:

$$\ddot{\xi}(t) + 2\zeta\omega\dot{\xi}(t) + \omega^2\xi(t) = R(t) \quad (4.29)$$

A solução da equação diferencial acima é a superposição da solução homogênea com a solução particular, esta sendo o resultado da excitação forçada. Portanto tem-se:

$$\xi(t) = \xi^{(h)}(t) + \xi^{(p)}(t) \quad (4.30)$$

Seja cada caso analisado separadamente, em que, adianta-se, é de interesse a busca da solução para o sistema subamortecido, isto é,  $0 < \zeta < 1$ . Neste caso a solução homogênea é dada na forma fechada por (MEIROVITCH, 1975)

$$\xi^{(h)}(t) = A e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \psi_0) \quad (4.31)$$

em que  $A$  e  $\psi_0$  são constantes determinadas pelas condições iniciais,  $\omega_n$  é a frequência natural do sistema e  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  a frequência amortecida.

Resta agora determinar a solução particular devido à excitação forçada do sistema. Como hipótese básica para derivar a solução é assumida que o movimento da coordenada generalizada segue a forma harmônica da excitação de entrada, com o incremento de uma mudança de fase e amplitude. Assim, seja uma excitação harmônica na forma

$$R(t) = R \cos(\omega t) \quad (4.32)$$

A resposta assume a forma (MEIROVITCH, 1975),

$$\xi^{(p)}(t) = X \cos(\omega t - \psi_1) \quad (4.33)$$

em que,

$$X = \frac{R}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2\zeta \omega/\omega_n)^2}} \quad \text{e,} \quad \psi_1 = \tan^{-1} \frac{2\zeta \omega/\omega_n}{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)} \quad (4.34)$$

As equações (4.31) e (4.33) representam a solução exata no domínio do tempo para a equação diferencial para cada modo de vibração obtido pelo método de análise modal. A solução global consiste na soma das soluções homogênea e particular e na transformação inversa para coordenadas físicas usando a relação modal (4.5).

Neste capítulo o problema de vibração mecânica foi resolvido pelo método da análise modal. A questão do acoplamento piezoeletrico é analisada sob o ponto de vista das condições de contorno elétricas. Verificou-se que para o controle ativo de vibrações, situação em que o piezoeletrico está conectado em circuito fechado, o acoplamento piezoeletrico não influencia nos modos de vibração e frequências naturais do sistema mecânica. As equações dinâmicas da piezeletricidade são escritas em função das variáveis de entrada e saída e desacopladas pelos modos de vibração. Esta forma torna-se interessante no projeto de controle que será visto no capítulo seguinte.

## CAPÍTULO 5

### CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES

A redução dos níveis de ruído e vibrações a um nível aceitável de projeto é um dos principais focos de estudo em vibrações mecânicas. Neste âmbito, os materiais piezelétricos acoplados a estruturas têm mostrado ser um meio efetivo para a redução da vibração. O controle de vibração pode ser dividido em duas vertentes principais: controle passivo e controle ativo. No que ao controle passivo com materiais piezelétricos, este consiste na conexão do piezelétrico a um circuito elétrico passivo, denominado circuito *shunt*, brevemente comentado no item 4.1.1. Os circuitos *shunts*, acoplados a piezelétricos, produzem um amortecimento similar aos materiais viscoelásticos, com a vantagem de poder ser ajustado de forma a obter um melhor desempenho na dissipação de energia vibratória através do circuito elétrico (SANTANA, 2005). Por sua vez, o controle ativo, tema dessa dissertação, visa controlar a vibração do sistema inserindo mais energia ao sistema. Esta energia extra é chamada de energia de controle e tenta contrapor as vibrações causadas pela energia de perturbação, suprimindo assim as vibrações. A energia a ser fornecida ao sistema é quantificada pelo controlador e é introduzida no sistema através do atuador piezelétrico.

Com relação à estratégia de controle, as duas formas mais importantes na teoria de controle são chamadas *feedback* e *feedforward*. Colla e Morita (2002) classificam estas duas estratégias de controle segundo a localização do sensor no sistema. Na estratégia *feedforward* o sensor está posicionado próximo a fonte de perturbação e é destinado a detectar todo o sinal de perturbação, contudo nenhuma monitoração do efeito do controle no sistema é observada. Na estratégia de controle *feedback* o sensor está posicionado no sistema de forma a detectar somente a resposta do sistema ao sinal de perturbação. Na grande maioria dos casos de controle de vibração, o sinal de perturbação nem sempre pode ser mensurável, o que torna a estratégia de controle *feedback* a opção viável. Esta é a opção tratada nesta dissertação e será exposta *a posteriori*. Contudo, cabe comentar que a estratégia *feedforward* pode trazer melhora de desempenho do sistema (COLLA e MORITA, 2002).

No projeto do controle é imprescindível o modelo do comportamento do sistema a ser controlado. O modelo teórico, desenvolvido nos capítulos anteriores, torna-se especialmente importante por evitar os elevados custos na obtenção de um modelo por meios experimentais. Na teoria de controle moderno a representação do modelo é feita no domínio do tempo, em se tratando de sistemas discretos com elevado número de graus de liberdade a representação por espaço de estados é uma forma eficiente de tratar o modelo. Esta representação é, em verdade, uma manipulação matemática do sistema de equações que tem por ob-

jetivo a redução de um sistema diferencial de segunda ordem para sistemas diferenciais de primeira ordem.

### 5.1 Representação por Espaço de Estados

Um sistema montado na forma de estado de espaços, mostrado na Figura 5.1, é especialmente importante na teoria de controle moderno. Constituindo uma das bases para formulação de métodos de controle no domínio do tempo, o projeto de sistemas de controle utilizando a abordagem de espaço de estados é viabilizado com o enorme avanço tecnológico no processamento digital de sinais. A vantagem do sistema digital em relação ao analógico é devido ao fácil ajuste dos parâmetros do sistema e ainda por permitir tratar sistemas e algoritmos não lineares (COLLA e MORITA, 2002).

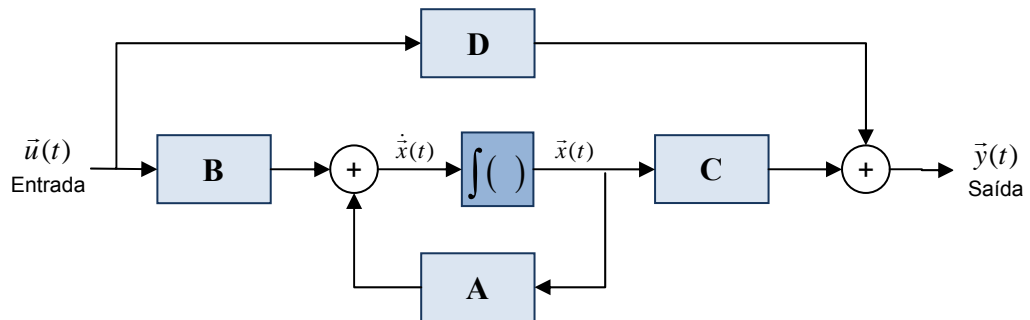


Figura 5.1: Diagrama de bloco do sistema em espaço de estados.

As equações em espaço de estado referente ao sistema apresentado na Figura 5.1 são,

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= \mathbf{A}\vec{x}(t) + \mathbf{B}\vec{u}(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\vec{x}(t) + \mathbf{D}\vec{u}(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

Na equação (5.1) e no diagrama de blocos da Figura 5.1 o sinal de entrada  $\vec{u}(t)$  é alimentado no sistema através da matriz de entrada  $\mathbf{B}$ . O sinal do bloco de entrada é somado ao termo de realimentação da matriz de sistema  $\mathbf{A}$ , e alimentado ao bloco do integrador. A entrada é ainda transmitida diretamente para saída, via matriz de transmissão direta  $\mathbf{D}$ . O sinal de saída  $\vec{y}(t)$  constitui da soma do sinal transmitido pela matriz  $\mathbf{D}$  com o sinal da matriz de saída  $\mathbf{C}$ . Os termos matriciais de cada bloco serão definidos posteriormente. O vetor  $\vec{x}(t)$  são as variáveis de estado do sistema e serão consideradas a seguir.

O sistema de equações dinâmicas de segunda ordem em (4.28) é bem conhecido na literatura de controle (DORF e BISHOP, 2001), para este sistema o vetor de estado é defini-



do por  $\vec{x}(t) = \{\vec{x}_1(t) \quad \vec{x}_2(t)\}^T$ , em que as variáveis de estado são definidas em termo das coordenadas generalizadas,  $\vec{\xi}(t)$ , no espaço modal por,

$$\begin{aligned}\vec{x}_1(t) &= \vec{\xi}(t) \\ \vec{x}_2(t) &= \dot{\vec{x}}_1(t) = \dot{\vec{\xi}}(t)\end{aligned}\tag{5.2}$$

Concerne agora tecer dois breves comentários em relação ao sistema piezelétrico. Primeiro, a entrada do sistema resulta de uma parcela de perturbação mecânica  $\vec{F}(t)$  e de um potencial elétrico aplicado  $\vec{\Phi}(t)$ . Estes entram no sistema de equações (4.28) através da transformação modal  $\boldsymbol{\varphi}_u^T$  e  $\boldsymbol{\varphi}_\phi^T$ , respectivamente. Segundo, na saída do sistema, é desejável obter os resultados de deslocamento mecânico  $\vec{U}(t)$  e carga elétrica  $\vec{Q}(t)$  em coordenadas físicas, estas estão relacionadas à variável modal pela relação (4.13) usando  $\boldsymbol{\varphi}_u$  e  $\boldsymbol{\varphi}_\phi$ , respectivamente. Assim o sistema em espaço de estados exposto em (5.1) pode ser modificado para o sistema atual na forma,

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= \mathbf{A}\vec{x}(t) + \mathbf{B}_u\vec{F}(t) + \mathbf{B}_\phi\vec{\Phi}(t) \\ \vec{U}(t) &= \mathbf{C}_u\vec{x}(t) \\ \vec{Q}(t) &= \mathbf{C}_\phi\vec{x}(t) + \mathbf{D}_\phi\vec{\Phi}(t)\end{aligned}\tag{5.3}$$

As matrizes de entrada  $\mathbf{B}_u$  e  $\mathbf{B}_\phi$  referem-se respectivamente as variáveis mecânicas e elétricas, bem como as matrizes de saídas  $\mathbf{C}_u$  e  $\mathbf{C}_\phi$ . A matriz de transmissão direta  $\mathbf{D}_\phi$  na equação de saída elétrica justifica-se dada a ausência de dinâmica elétrica na presente formulação. O novo sistema pode ser representado em diagrama de blocos na Figura 5.2 a seguir.

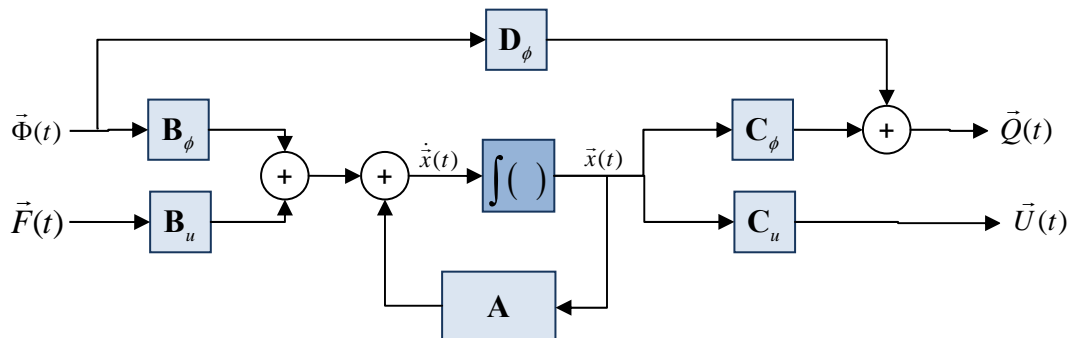


Figura 5.2: Diagrama de bloco do sistema em espaço de estados.

As matrizes da equação de espaço de estado (5.3) são escritas na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{2N \times 2N} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[N \times N]} & \mathbf{I}_{[N \times N]} \\ -\text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_N^2) & -2 \text{diag}(\zeta_1 \omega_1, \dots, \zeta_N \omega_N) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{B}_{u_{[2N \times N_u]}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[N \times N_u]} \\ [\boldsymbol{\Phi}_u^T]_{N \times N_u} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{B}_{\phi_{[2N \times N_\phi]}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[N \times N_\phi]} \\ [\boldsymbol{\Phi}_\phi^T]_{N \times N_\phi} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C}_{u_{[N_u \times 2N]}} &= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\Phi}_u]_{N_u \times N} & \mathbf{0}_{[N_u \times N]} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C}_{\phi_{[N_\phi \times 2N]}} &= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\Phi}_\phi]_{N_\phi \times N} & \mathbf{0}_{[N_\phi \times N]} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

em que  $N$  é o número de coordenadas modais do sistema e,  $N_u$  e  $N_\phi$  são respectivamente o número de graus de liberdade de deslocamento e potencial elétrico em coordenadas físicas.

O sistema descrito em espaço de estado nesta seção facilita o projeto de sistemas de controle de vibração através do enorme ferramental para controle e simulação disponível no programa comercial MATLAB® (HATCH, 2001; INMAN, 2006).

## 5.2 Sistema de Controle e a Estratégia *Feedback*

Um exemplo de controle de uma viga com sensores e atuadores piezelétricos pode ser visto na Figura 5.3. O sistema mostrado consiste de uma viga engastada em uma das extremidades e sujeita a um distúrbio (perturbação) na extremidade livre. As vibrações induzidas na viga são captadas pelo sensor piezelétrico. O sinal deste sensor passa por um conversor de sinal (basicamente um amplificador de carga) e é transmitido ao sistema de aquisição e controle. O sistema de controle determina o ganho necessário para que seja possível atenuar as vibrações. O sinal de saída determinado pelo controlador é amplificado na potência necessária e transmitido ao atuador que, por fim, age sobre a viga atenuando as vibrações induzidas pela fonte de distúrbio.

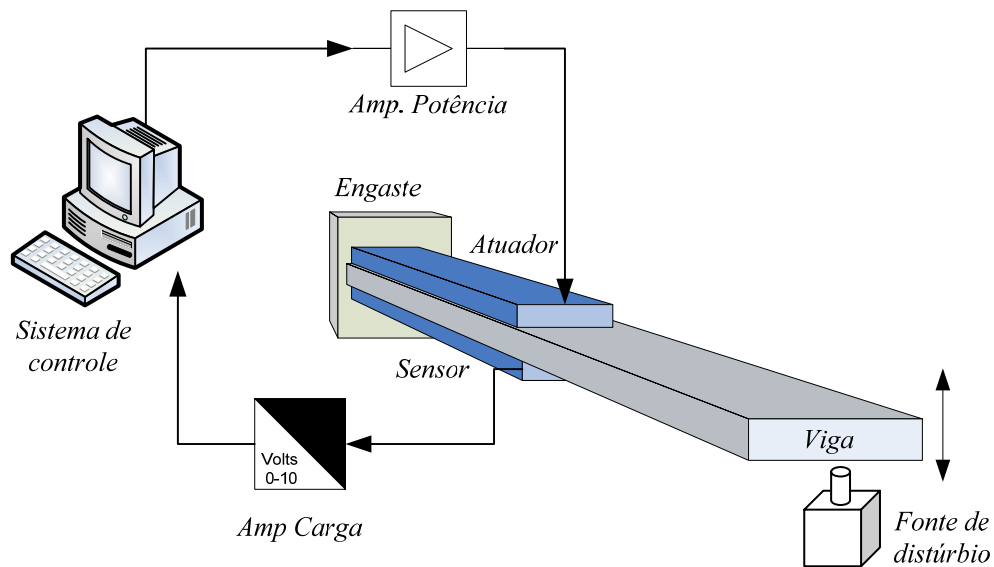


Figura 5.3. Sistema de controle em uma viga engastada.

É importante observar que as equações de estado (5.3) para o sistema montado na Figura 5.3 incluem tanto o atuador quanto o sensor, i.e., ambos fazem parte da estrutura a ser controlada. O sinal mecânico produzido pela fonte de distúrbio é uma perturbação não mensurável pelo sistema, assim somente a resposta do sistema a este sinal é captada pelo sensor. A resposta medida pelo sensor, por sua vez, é realimentada no algoritmo de controle através do amplificador de carga. Dessa forma, a estrutura de controle para este sistema pode ser classificada como uma estratégia *feedback*. A Figura 5.4, a seguir mostra o diagrama de blocos para este sistema controlado por realimentação negativa.

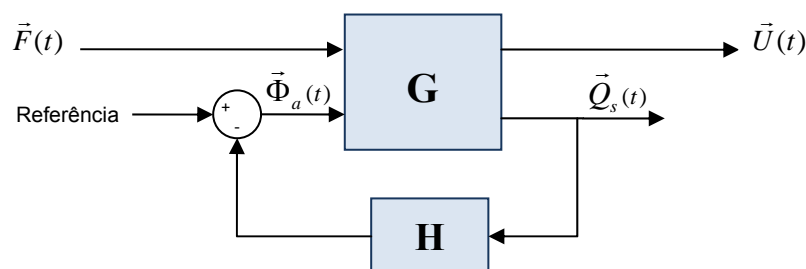


Figura 5.4: Diagrama de blocos de um sistema de controle realimentado.

No diagrama da Figura 5.4 o bloco denominado por  $G$  representa o sistema a ser controlado, este bloco concatena todo o sistema representado em espaço de estado no diagrama da Figura 5.2. Este sistema difere dos sistemas realimentados comumente encontrados na literatura pelo fato de que os sensores e os atuadores estarem incorporados no bloco

do sistema a ser controlado. O controlador é representado pelo bloco **H** e inclui o sistema de controle e os periféricos tais como amplificador de potência e amplificador de carga. Para o caso específico de rejeição de perturbação, objetivo do trabalho, a referência para o controle é sempre nula.

### 5.3 Técnica de Controle Ótimo

O controlador pode ser compreendido como uma dinâmica introduzida com o objetivo de alterar o sistema para obter um melhor resultado. É possível que mais de uma arquitetura de projeto de controle alcance tal objetivo.

Independente da estratégia de controle adotada é imprescindível definir técnicas para se determinarem os parâmetros do controlador, ou seja, ganhos, pólos, zeros, e outros parâmetros que venham definir o comportamento dinâmico do controle. A metodologia de aproximação usada para determinar os parâmetros de controle é chamada de técnicas de controle, das quais se podem citar algumas classes tais como: alocação de pólos, controle ótimo, controle robusto. A técnica de alocação de pólos consiste em selecionar os pólos do sistema em malha fechada de forma garantir a dinâmica desejada, como por exemplo, o tempo de estabilização do sistema. Somente após a definição desses pólos é que os ganhos são calculados a partir da dinâmica correspondente ao sistema gerado pela pré-alocação dos pólos. A alocação de pólos pode não ser trivial para alguns sistemas, o que pode não levar a obtenção do melhor desempenho. A técnica de controle ótimo busca atingir o melhor desempenho do sistema pelo critério de minimização de uma função de custo. O processo de minimização reduz para a chamada equação de Riccati, de onde são calculados os ganhos do controlador (MEIROVITCH, 1985; FULLER *et al.*, 1997; KWON e BANG, 1997). É interessante observar que o projeto de controle ótimo resulta em um sistema assintoticamente estável em malha fechada e de certa forma robusto com relação a incertezas do processo (HESPANHA, 2007). Contudo, o controle ótimo não garante robustez absoluta do sistema; neste âmbito surgem as técnicas de controle robusto, cuja teoria vai além do escopo aqui apresentado.

Uma função de custo (ou índice de desempenho) comumente usada na técnica de controle ótimo é conhecida como Regulador Linear-Quadrático (LQR). Este consiste em um critério de minimização energética, buscando ponderar entre a energia do sinal a ser controlado mantendo um compromisso com a energia gasta pelo sinal de controle. Na versão de realimentação de estados (sendo este o sinal a ser controlado) o problema LQR pode ser formulado pela função custo a seguir,

$$J_{LQR} = \min_{\vec{\Phi}(t)} \int_0^{\infty} \left[ \vec{x}(t)^T \mathbf{Q}_0 \vec{x}(t) + \vec{\Phi}(t)^T \mathbf{R}_0 \vec{\Phi}(t) \right] dt \quad (5.5)$$

em que  $\mathbf{Q}_0$  e  $\mathbf{R}_0$  são matrizes de ponderação, simétrica e positiva definida, dos estados e da ação de controle, respectivamente. O sinal de entrada para o problema em questão são os potenciais elétricos  $\vec{\Phi}(t)$  dos atuadores, que representam a ação de controle. A equação de estado para  $\vec{x}(t)$  foi previamente definida na Eq. (5.3) e suas matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_u$ ,  $\mathbf{B}_\phi$ ,  $\mathbf{C}_u$  e  $\mathbf{C}_\phi$  foram definidas em (5.4).

Na função de custo, Eq. (5.5), é importante observar que quanto maior a ponderação da energia dos estados, mais oscilatório é o sistema e o tempo de estabilização fica comprometido. Por outro lado, quanto maior a energia do sinal de controle, maior é a solicitação dos atuadores (TROFINO NETO, 2007), o que eventualmente pode levar a saturação ou sinal demasiadamente elevado para os atuadores.

Em essência, projeto de controle ótimo resulta em um método iterativo de tentativa e erro para a escolha dos termos de ponderação. Hespanha (2007) apresenta a regra de *Bryson* como uma primeira aproximação, em que se escolhe  $\mathbf{Q}_0$  e  $\mathbf{R}_0$  diagonais com termos definidos por,

$$\begin{aligned} Q_{ii} &= \frac{1}{\text{máximo valor aceitável para } x_i^2} \\ R_{ii} &= \frac{1}{\text{máximo valor aceitável para } u_i^2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

normalizando os termos de energia a unidade.

A lei de controle que satisfaz a função de custo (5.5) para um sistema linear invariante no tempo definido em (5.3) é encontrada em Fuller *et al.* (1997) e Hespanha (2007), esta é definida na forma:

$$\vec{\Phi} = -\mathbf{K}\vec{x} \quad (5.7)$$

em que a matriz de ganho de realimentação  $\mathbf{K}$  ótima é dada pela expressão:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{P} \quad (5.8)$$

sendo  $\mathbf{P}$  a solução única, positiva definida, da equação algébrica de *Riccati* descrita abaixo:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}_u^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{C}_u - \mathbf{P} \mathbf{B}_\phi \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

Assim encontrando-se o conjunto de soluções  $\mathbf{P}$  volta-se a equação (5.8) para determinar os ganhos do controlador LQR.

#### 5.4 Técnica de Controle Modal

Em se tratando de controle ativo de vibrações, têm-se o controle modal como uma nova abordagem, em que, duas leis de controle se destacam de forma diferenciada: O Controle Acoplado (CA) e o Controle de Espaço-Modal Independente (IMSC). Essa diferença pode ficar mais clara mostrando-se as leis de controle para cada abordagem (MEIROVITCH, 1985).

Lei de controle para CA:

$$\mathbf{R}_r(t) = - \sum_{s=1}^N \left[ g_{rs} \xi_s(t) + h_{rs} \dot{\xi}_s(t) \right] \quad (5.10)$$

Lei de controle para IMSC:

$$\mathbf{R}_r(t) = -g_r \xi_r(t) - h_r \dot{\xi}_r(t) \quad (5.11)$$

Em que  $\mathbf{R}_r$  e  $\xi_r$  são, respectivamente, o vetor de força modal e o vetor de coordenada modal definidos na Eq. (4.28),  $g$  e  $h$  os ganhos de deslocamento e velocidade a serem determinados e  $N$  é o número de modos. É possível verificar que uma simplificação substancial é feita da lei de controle em (5.10) para a lei de controle do IMSC em (5.11) reduzindo assim o esforço de projeto em se determinar os ganhos do controlador. Outra observação a ser feita é que a forma IMSC de abordar o controle mantém o sistema (4.28) desacoplado, ao passo que levando (5.10) em (4.28) o sistema volta a ser acoplado por realimentação dos modos no vetor de carga.

## CAPÍTULO 6

### RESULTADOS OBTIDOS

Nos capítulos anteriores a teoria do problema dinâmico em piezeletricidade foi apresentada. As equações dinâmicas e a forma fraca são obtidas, em seguida o problema é resolvido usando o método dos elementos finitos, por fim a solução dinâmica é obtida usando-se o método de análise modal. Neste capítulo os resultados dos programas gerados a partir da teoria desenvolvida são apresentados. A validação dos resultados é feita por comparação com a literatura ou por comparação com o modelo piezelétrico 3D do programa comercial Ansys®.

Os resultados são apresentados em três etapas. Primeiro o programa de elementos finitos é testado para sistemas estáticos. Placas e vigas são testadas para força e tensão elétrica constantes, e os resultados para deslocamento e potencial elétrico do sensor são comparados à literatura. A segunda etapa é a validação dinâmica da análise modal. Neste âmbito são realizados testes numéricos tanto em circuito aberto como em circuito fechado. Por fim a terceira etapa mostra resultados no domínio do tempo e da frequência para o controle de uma viga e de uma placa vibrando devido a uma perturbação mecânica.

#### 6.1 Validação Estática

##### 6.1.1 Teste para Placa Isotrópica Pura

O primeiro exemplo é para uma placa isotrópica simplesmente apoiada sob a ação de uma força concentrada no meio da placa, ver Figura 6.1. Pode-se identificar os planos de simetria tal que apenas  $\frac{1}{4}$  da placa é modelada, reduzindo assim o custo computacional do modelo. As propriedades do material e geometria da placa são dadas na Tabela 5. Os testes são realizados para diferentes relações largura-espessura. Os resultados das deflexões máximas são comparados com o exemplo resolvido 10.7.1 em Kwon e Bang (1997). Como base de comparação foi usado um modelo desenvolvido no programa ANSYS com uma malha de 25x25 elementos quadráticos de 8 nós cada. Para o caso da placa fina,  $\frac{L}{h} = 100$ , a solução analítica também é fornecida.

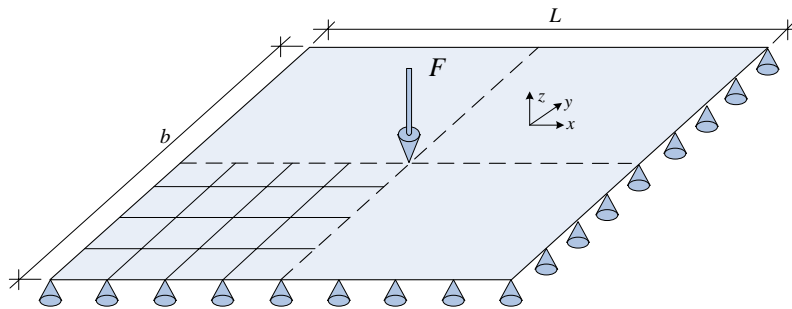


Figura 6.1: Placa Isotrópica simplesmente apoiada sob ação de uma força concentrada.

Tabela 5 – Dados para placa isotrópica da Figura 6.1.

| <i>Propriedade</i>         | <i>Valor</i> |
|----------------------------|--------------|
| Comprimento (L)            | 10 pol       |
| Largura (b)                | 10 pol       |
| Módulo de Young (Y)        | 30e6 psi     |
| Coef. de Poisson ( $\nu$ ) | 0,3          |
| Carga Aplicada (F)         | 40 lb        |

Tabela 6 – Comparação de resultados de deflexão máxima (em polegadas) para a placa simplesmente apoiada submetida a uma força concentrada.

| <i>Relação L/h</i>           | <i>Malha</i> | <i>Kwon e Bang</i> |       | <i>Presente</i>  |        |
|------------------------------|--------------|--------------------|-------|------------------|--------|
|                              |              | <i>FSDT – Q4</i>   |       | <i>FSDT – Q9</i> |        |
| 10                           | 2 x 2        | 0,00001953         | 91,1% | 0,00002027       | 94,6%  |
|                              | 3 x 3        | 0,00002003         | 93,5% | 0,00002084       | 97,2%  |
|                              | 4 x 4        | 0,00002044         | 95,4% | 0,00002123       | 99,1%  |
| ANSYS (SHELL93) 50 x 50      |              | 0,000021430        |       |                  |        |
| 50                           | 2 x 2        | 0,00013960         | 97,4% | 0,00014172       | 98,9%  |
|                              | 3 x 3        | 0,00014064         | 98,2% | 0,00014292       | 99,7%  |
|                              | 4 x 4        | 0,00014167         | 98,9% | 0,00014374       | 100,3% |
| ANSYS (SHELL93) 25 x 25      |              | 0,00014328         |       |                  |        |
| 100                          | 2 x 2        | 0,01678521         | 99,1% | 0,01689260       | 99,8%  |
|                              | 3 x 3        | 0,01679541         | 99,2% | 0,01691359       | 99,9%  |
|                              | 4 x 4        | 0,01683598         | 99,4% | 0,01692444       | 100,0% |
| Solução Analítica (clássica) |              | 0,016900 (99,8%)   |       |                  |        |
| ANSYS (SHELL93) 25 x 25      |              | 0,016931           |       |                  |        |

Os resultados da Tabela 6 mostram-se satisfatórios. Pode-se notar que o modelo com elementos Q9 apresentam uma convergência mais rápida para o resultado final que o



modelo com elementos Q4. Os elementos Q4 possuem uma rigidez parasita, denominada na literatura por *shear locking*, que torna o elemento menos flexível que os elementos quadráticos Q9 e Q8 (ANSYS). Isto é perceptível nos resultados apresentados. Também é possível verificar que o modelo de placa espessa,  $h/L = 10$  precisa de um maior número de elementos para convergir que o modelo de placa fina,  $h/L = 100$ .

A seguir a verificação da formulação isoparamétrica será analisada usando-se a malha 3x3 para as três espessuras de placa estudadas acima. A distorção dos elementos da malha pode ser vista na Figura 6.2 a seguir, e os resultados logo em seguida na Tabela 7.

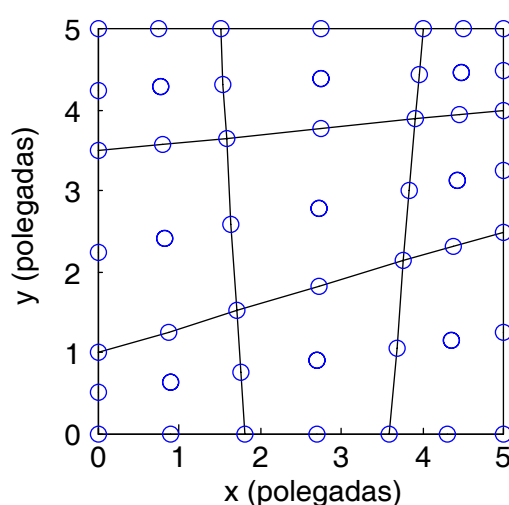


Figura 6.2: Malha de  $\frac{1}{4}$  da placa com elementos distorcidos.

Tabela 7 – Comparação dos resultados de deflexão para uma malha distorcida.

| Relação $L/h$ | Malha | Não-Distorcido | Distorcido          |
|---------------|-------|----------------|---------------------|
| 10            | 3 x 3 | 0,00002084     | 0,00002113 (101,4%) |
| 50            |       | 0,00014292     | 0,00014349 (100,4%) |
| 100           |       | 0,01691359     | 0,01690805 (100,0%) |

Percebe-se pela Tabela 7 que a distorção do elemento altera a rigidez do elemento (neste caso houve uma redução da rigidez, favorecendo o deslocamento da placa). No geral, sabe-se que a distorção do elemento eleva-se o erro do modelo.

Validado o caso mecânico estático, passe-se agora para o caso piezelétrico visto a seguir.

### 6.1.2 Teste do Bimorfo Piezelétrico

A validação do modelo de elemento piezelétrico é feita primeiramente com uma viga bimorfa constituída de duas lâminas piezelétricas perfeitamente coladas e engastada em uma das extremidades (ver Figura 6.3). Trata-se de um teste clássico para validação de modelos piezelétricos. A viga é feita de PVDF e possui comprimento  $L = 100 \text{ mm}$ , largura  $b = 5 \text{ mm}$  e espessura  $h = 1 \text{ mm}$ . As propriedades do PVDF são mostradas na Tabela 8.

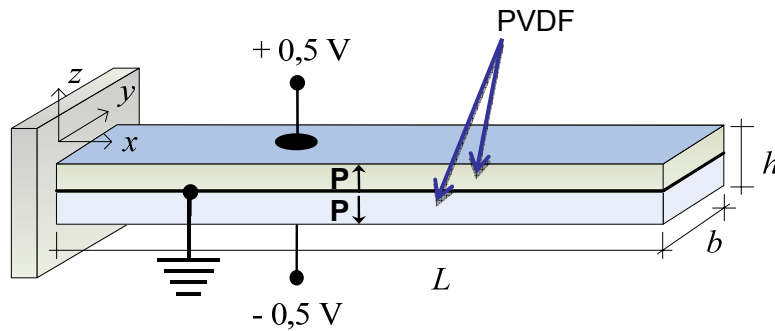


Figura 6.3: Viga bimorfo de PVDF.

Tabela 8 – Propriedades do PVDF Kynar.

| Elasticidade (GPa) |            |            |            |            | Piezeletricidade ( $\text{C}/\text{m}^2$ ) |          |          | Permissividade Relativa |                 |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|--|----------|----------|-------------------------|-----------------|
| $C_{11}^E$         | $C_{12}^E$ | $C_{13}^E$ | $C_{33}^E$ | $C_{44}^E$ | $e_{31}$                                   | $e_{33}$ | $e_{15}$ | $\kappa_{11}^S$         | $\kappa_{33}^S$ |
| 2,2                | 0,775      | -          | -          | 0,775      | -0,046                                     | -        | -        | -                       | 12              |

Dois casos são apresentados. O primeiro caso visa verificar a deflexão do bimorfo quando este é usado como atuador. Uma diferença de potencial  $\phi = 1 \text{ V}$  é aplicado no bimorfo e as deflexões ao longo da viga são comparadas com o resultado analítico (teoria de *Euler-Bernoulli*) segundo a fórmula abaixo, apresentada por Piefort (2001).

$$w(x) = -\frac{3}{2} \frac{d_{31} \phi}{h} \quad (6.1)$$

Os resultados são apresentados na Figura 6.4 a seguir.

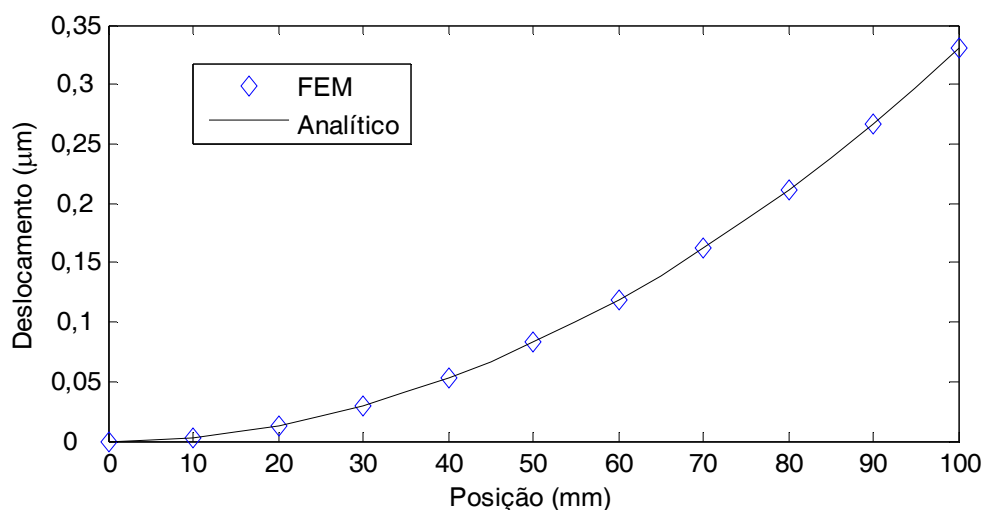


Figura 6.4: Deflexão estática do bímorfo sujeito a um potencial elétrico de 1 Volt.

Os resultados da formulação presente são comparados numericamente na Tabela 9 a seguir. A comparação é feita com os resultados da teoria clássica dados pela Eq. (6.1) e com a teoria de terceira ordem em camada discretas apresentados por Chee (2000).

Tabela 9 – Comparação do deslocamento  $w$  do bímorfo piezelétrico em função do comprimento.

| <i>Posição</i><br><i>X (m)</i> | <i>Analítico</i><br><i>CLPT</i> | <i>Presente</i><br><i>FSPT</i> | <i>Chee</i><br><i>TODL</i> |
|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|----------------------------|
| 0,00                           | 0,0                             | 0,0                            | 0,0                        |
| 0,02                           | 0,0138                          | 0,0138                         | 0,0138                     |
| 0,04                           | 0,0552                          | 0,0552                         | 0,0552                     |
| 0,06                           | 0,1242                          | 0,1242                         | 0,1242                     |
| 0,08                           | 0,2208                          | 0,2208                         | 0,2208                     |
| 0,1                            | 0,3450                          | 0,3450                         | 0,3450                     |

Nota-se na tabela comparativa que os resultados apresentam uma perfeita sintonia até a quarta casa decimal. Os resultados da teoria de primeira ordem e da teoria de terceira ordem não apresentam uma melhora na precisão dos resultados em relação aos resultados analíticos da teoria clássica, isto se deve à alta relação  $L/h$  do bímorfo. Neste caso, o cisalhamento transversal é quase nulo e não afeta a deflexão da viga.

O segundo caso visa verificar o potencial elétrico gerado nos eletrodos quando um deslocamento transversal de 10 mm é imposto na ponta do bímorfo. Duas configurações são apresentadas: (1) um par de eletrodos cobrindo a superfície superior e inferior da viga; (2)

cinco pares de eletrodos distribuídos ao longo a superfície superior e inferior da viga. Os resultados são mostrados na Figura 6.5 e Figura 6.6 a seguir.

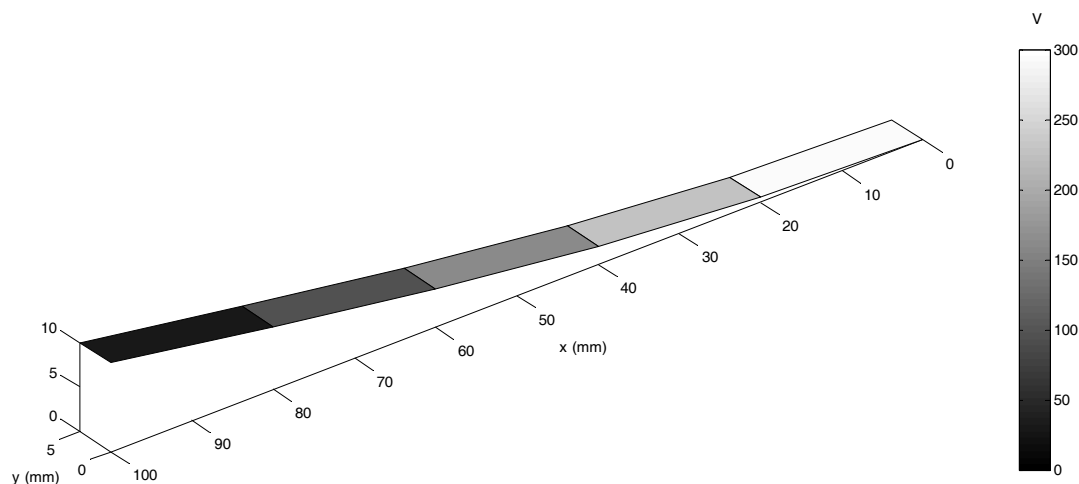


Figura 6.5: Distribuição do potencial elétrico para o bimorfo com cinco pares de eletrodos

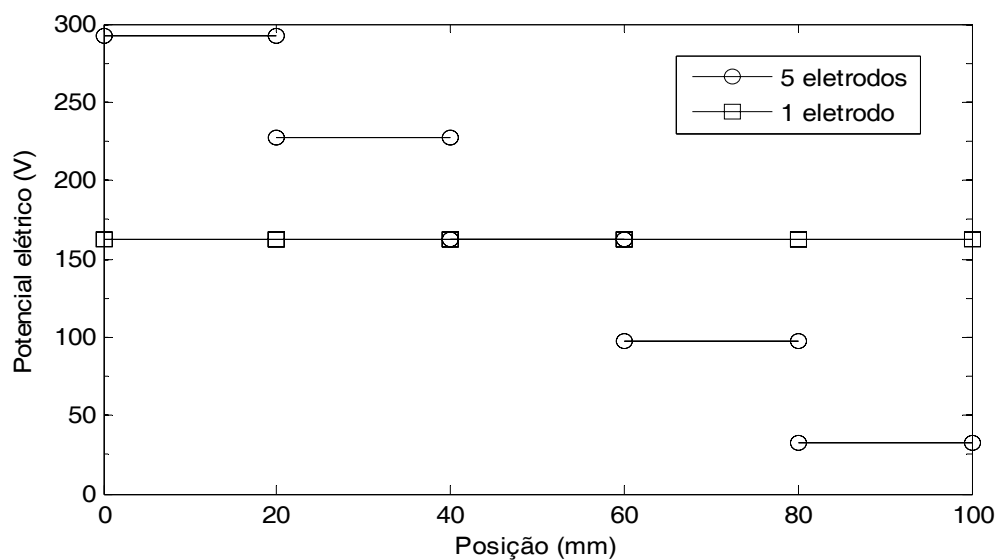


Figura 6.6: Distribuição do potencial elétrico no bimorfo para um e cinco pares de eletrodos.

Na Tabela 10 a seguir são comparados os valores numéricos com os resultados obtidos por Hwang e Park (1993) e Piefort (2001). Na falta de valores tabelados, os dados foram extraídos por inspeção gráfica, sendo a última casa numérica a incerteza da medição.

Tabela 10– Distribuição do potencial elétrico (em Volts) no bímorfo.

| <i>Eletrodos</i>      | <i>E1</i> | <i>E2</i> | <i>E3</i> | <i>E4</i> | <i>E5</i> |
|-----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Presente (FSPT)       | 292,9     | 227,8     | 162,7     | 97,6      | 32,5      |
| Piefort (FSPT) *      | 285       | 225       | 160       | 95        | 30        |
| Hwang e Park (CLPT) * | 275       | 200       | 150       | 90        | 30        |

\* Valores extraídos por inspeção gráfica do artigo.

A Tabela 10 apresenta resultados satisfatórios para o potencial elétrico gerado quando comparado a literatura. Divergências maiores são encontradas próximas à região do engaste, isto porque esta região apresenta um maior gradiente de deformações. Os resultados de Hwang e Park (1993) convergem para os valores da tabela quando usados 2 elementos por eletrodo, num total de 10 elementos. Testes usando um maior número de elementos no modelo presente não apresentaram melhora significativa no potencial elétrico desenvolvido. Piefort (2001) usa 1 elemento por eletrodo e o teoria FSPT, contudo não informa que tipo de elemento é usado (quadrático ou linear).

### 6.1.3 Viga Espessa Coberta com Piezelétricos

Este teste consiste de uma viga de alumínio engastada em uma das pontas, coberta por um par de piezelétrico PZT-5H na superfície superior e inferior (ver Figura 6.7). Este é o mesmo teste usado por Zhang e Sun (1996) e Ahmad *et al.* (2006). As propriedades do alumínio são: módulo de elasticidade  $E = 70,3 \text{ GPa}$  e Poisson  $\nu = 0,345$ . As propriedades do PZT-5H são dadas na Tabela 11. As dimensões da viga são: comprimento  $L = 100 \text{ mm}$ , largura  $b = 10 \text{ mm}$ , espessura do alumínio  $h_a = 16 \text{ mm}$ , e espessura de cada camada de piezelétrico  $h_p = 1 \text{ mm}$ . A espessura total do sanduíche é  $h = h_a + 2h_p$ .

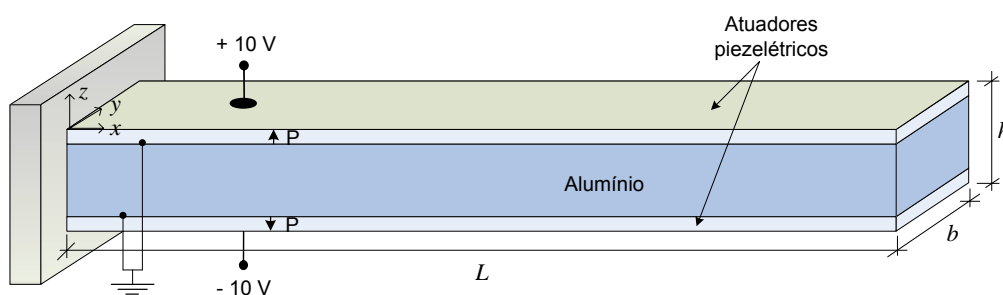


Figura 6.7: Viga sanduíche contendo piezelétricos nas superfícies superior e inferior.

Tabela 11 – Propriedades de material para o PZT-5H.

| Elasticidade (GPa) |            |            |            |            | Piezeletricidade ( $\text{C}/\text{m}^2$ ) |          |          | Permissividade Relativa |                 |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|--|----------|----------|-------------------------|-----------------|
| $C_{11}^E$         | $C_{12}^E$ | $C_{13}^E$ | $C_{33}^E$ | $C_{44}^E$ | $e_{31}$                                   | $e_{33}$ | $e_{15}$ | $\kappa_{11}^S$         | $\kappa_{33}^S$ |
| 126                | 79,5       | 84,1       | 117        | 23         | -6,5                                       | 23,3     | 17,0     | 1700                    | 1480            |

O atuador piezelétrico superior é polarizado na direção positiva de  $z$  e é aplicado um potencial elétrico de 10 Volts na superfície livre. O atuador piezelétrico inferior é polarizado na direção reversa e é aplicado um potencial elétrico de -10 V na superfície livre. O resultado da deflexão em função do comprimento da viga é apresentado na Figura 6.8.

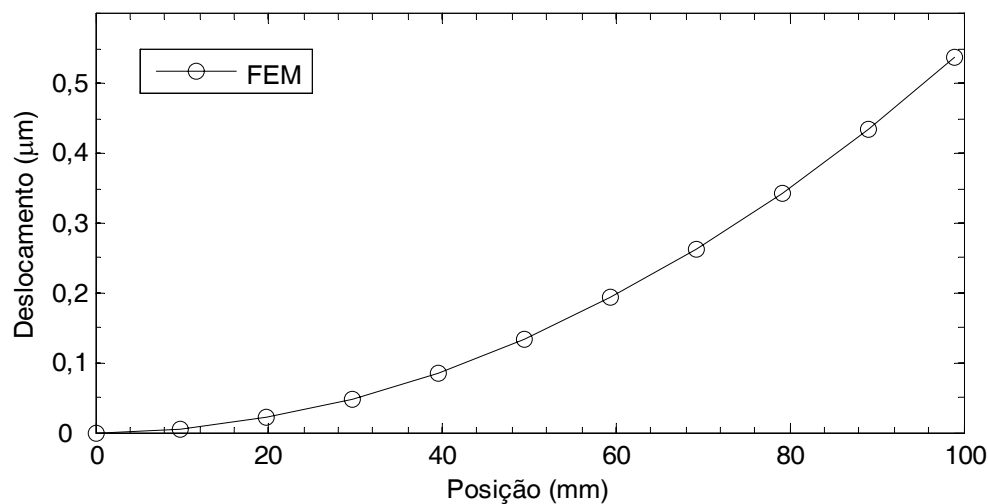


Figura 6.8: Deflexão da viga sanduíche para um potencial elétrico aplicado.

A Tabela 12 a seguir compara os valores de deflexão na ponta da viga com os resultados obtidos por Zhang e Sun (1996) e Ahmad *et al.* (2006). Os dados da literatura foram extraídos por inspeção gráfica, sendo a última casa decimal a incerteza da medição.

Tabela 12 – Comparação do deslocamento máximo da ponta da viga sanduíche para um potencial elétrico de 10 V aplicado em cada lâmina.

| Posição<br>$x$ (m) | Presente<br>FSDT | Zhang*<br>CLPT/FSDT | Ahmad*<br>HSDT |
|--------------------|------------------|---------------------|----------------|
| 0,1                | 0,538            | 0,54                | 0,60           |

\* Valores extraídos por inspeção gráfica do artigo.

Os resultados na Tabela 12 mostram uma boa aproximação da deflexão com o modelo de Zhang e Sun (1996) ao passo que uma diferença significativa é encontrada se com-

parado com Ahmad *et al.* (2006). Tal diferença pode ser devido ao fato de Ahmad *et al.* usar uma teoria de ordem superior como hipótese de deslocamento, e uma função quadrática como hipótese de potencial elétrico, além de desenvolver o modelo em teoria de camadas discretas. Todas estas considerações usadas por Ahmad *et al.* contribuem para deixar o modelo mais flexível, o que justifica valores maiores de deslocamento.

#### 6.1.4 Placa Fina com Pastilhas Piezelétricas

A Figura 6.9 mostra uma placa simplesmente apoiada com sensores/atuadores distribuídos. Este é o mesmo sistema proposto por Abreu (2003) em que as dimensões da placa são: comprimento  $L = 600$  mm, largura  $b = 400$  mm e espessura  $h = 1$  mm. As dimensões dos piezelétricos são:  $L_p = 100$  mm,  $b_p = 100$  mm. Os sensores (PVDF) são postos na superfície inferior da placa e possuem espessura  $h = 0,0205$  mm, e os atuadores (PZT) na superfície superior possuem espessura  $h = 0,0254$  mm.

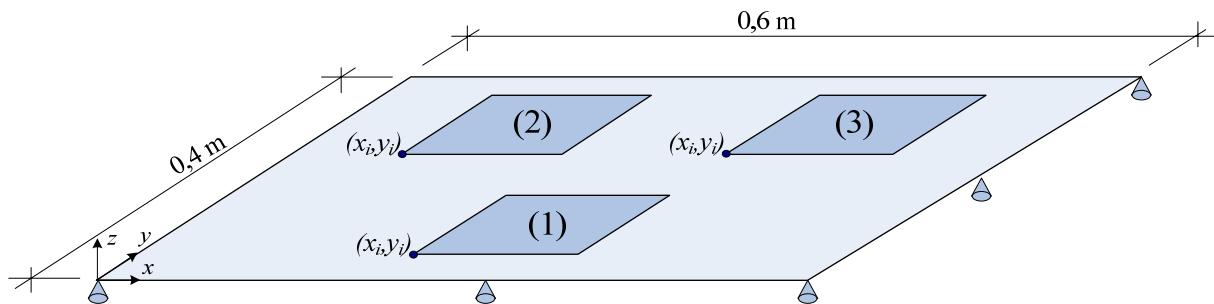


Figura 6.9: Placa de Abreu (2003) com três pastilhas piezelétricas.

Os pares sensores/atuadores são posicionados pelo canto inferior esquerdo conforme a Tabela 13 a seguir.

Tabela 13 – Posicionamento dos pares Sensor/Atuador na placa.

| Posição (mm) | Sensor/Atuador |     |     |
|--------------|----------------|-----|-----|
|              | 1              | 2   | 3   |
| $x_i$        | 250            | 150 | 350 |
| $y_i$        | 50             | 250 | 250 |

A placa de material isotrópico possui módulo de elasticidade  $E = 207$  GPa e Poisson  $\nu = 0,29$ . O sensor de PVDF *Kynar* é o mesmo usado no teste do bimorfo com propriedades dadas na Tabela 8. O Atuador possui propriedades dadas na Tabela 14 a seguir.

Tabela 14 – Propriedade para o atuador PZT (Abreu).

| Elasticidade (GPa) |            |            |            |            | Piezeletricidade ( $\text{C/m}^2$ ) |          |          | Permissividade Relativa |                 |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|-------------------------------------|----------|----------|-------------------------|-----------------|
| $C_{11}^E$         | $C_{12}^E$ | $C_{13}^E$ | $C_{33}^E$ | $C_{44}^E$ | $e_{31}$                            | $e_{33}$ | $e_{15}$ | $\kappa_{11}^S$         | $\kappa_{33}^S$ |
| 75,8               | 22,7       | -          | -          | 26,5       | -12,35                              | -        | -        | -                       | 1800            |

A polarização das pastilhas piezelétricas está na direção positiva de  $z$ , enquanto que no trabalho de Abreu (2003) a polarização está na direção oposta. Por isso o potencial elétrico aplicado nos atuadores do presente trabalho tem a seqüência 1V, -1V e -1V para os atuadores 1, 2 e 3, respectivamente. O resultado para as deflexões devidas ao potencial elétrico aplicado pode ser visto na Figura 6.10 na próxima página.

Os resultados são condizentes com a teoria de deformações de piezelétricos. Segue que, sendo um potencial elétrico positivo aplicado à pastilha 1, esta se contrai na direção transversal, e estando a pastilha colada na superfície superior da placa é gerado um momento que causa as deflexões negativas na região da pastilha 1. O inverso ocorre na região das pastilhas 2 e 3, em que um potencial elétrico negativo foi aplicado.

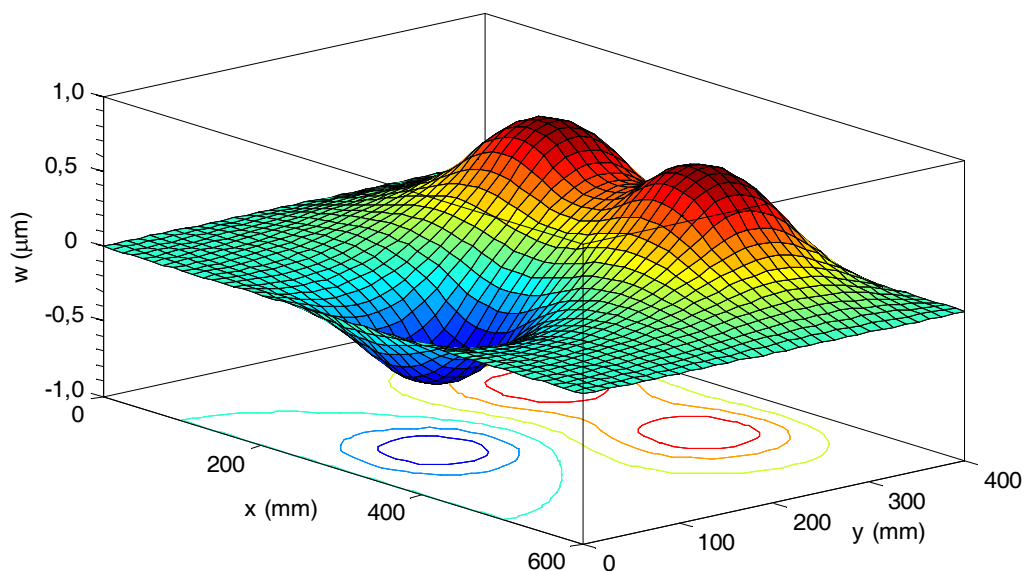


Figura 6.10: Deflexão estática para potencial elétrico aplicado (336 elementos).

Um corte longitudinal e outro transversal são usados para comparar as deflexões do presente modelo com um modelo realizado no programa comercial ANSYS®. O modelo do ANSYS® foi desenvolvido usando elementos sólidos, tanto para modelar a placa, quanto



para modelar as pastilhas piezelétricas. Inicialmente o modelo do ANSYS® possui 750 elementos sólidos hexaedros lineares com 3 GL mecânico por nó, comparando com o presente modelo de placa com 336 elementos planos quadráticos com 5 GL mecânico por nó. Os resultados são mostrados na Figura 6.11 a seguir.

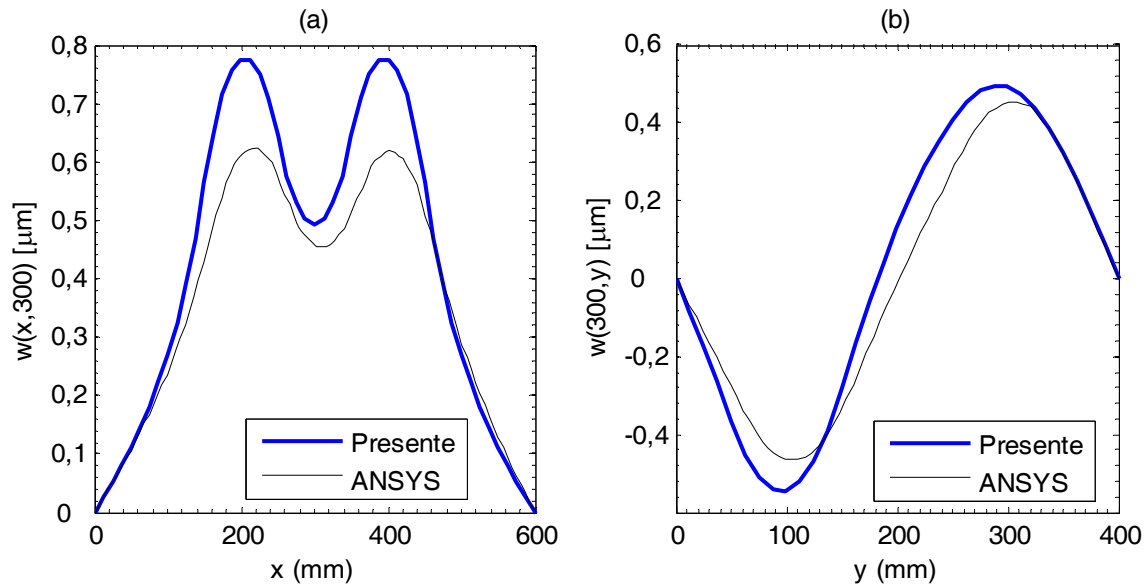


Figura 6.11: Resultados da deflexão do presente modelo (336 elementos) com o modelo do Ansys (750 elementos). (a) corte longitudinal em  $y=300\text{mm}$  e (b) corte transversal em  $x=300\text{mm}$ .

Apesar de o modelo sólido do ANSYS® possuir elementos muito alongados devido à fina espessura da placa, este forneceu resultados coerentes com o presente modelo, apesar do elevado custo computacional. Elementos sólidos muito alongados podem apresentar o problema de locking de cisalhamento, degradando o resultado final do modelo. Para verificar isto o número de elementos do modelo do ANSYS® foi aumentado para 3000 elementos, elevando-se mais ainda o custo computacional. Os resultados são mostrados na Figura 6.12 em que nota-se a melhora dos resultados, aproximando-se do presente modelo de placa.

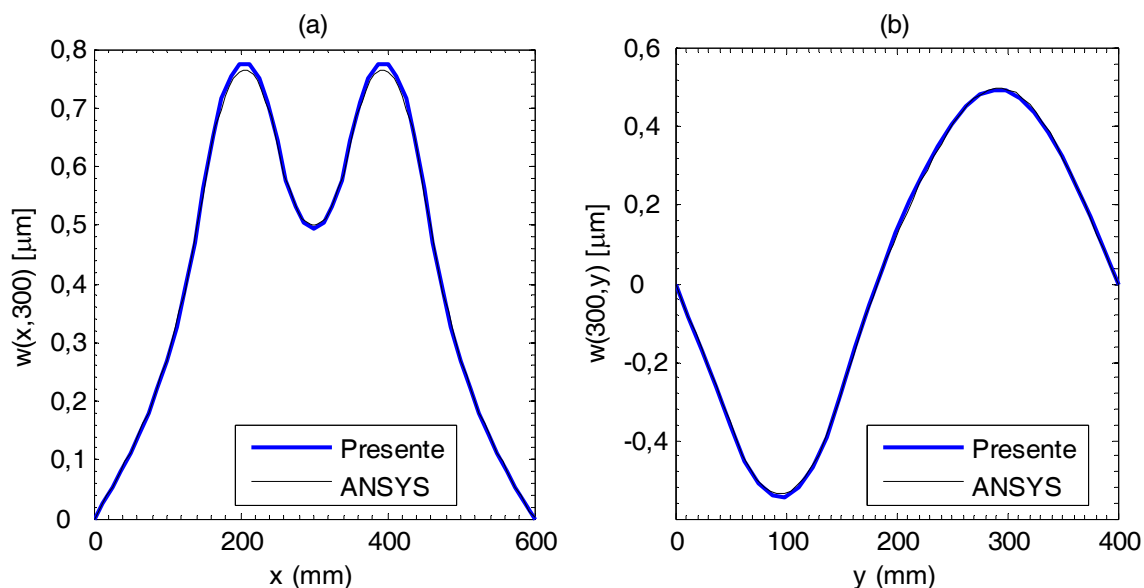


Figura 6.12: Resultados da deflexão do presente modelo (336 elementos) com o modelo do Ansys (3.000 elementos). (a) corte longitudinal em  $y=300\text{mm}$  e (b) corte transversal em  $x=300\text{mm}$ .

Na Tabela 15 são comparados os valores do potencial elétrico desenvolvido nos sensores de PVDF colados na superfície inferior da placa. Comparando os resultados com o presente modelo, os resultados de Abreu (2003), usando CLPT, estão muito distantes do modelo aqui apresentado. O resultado do ANSYS® com 750 elementos também apresenta uma diferença significativa. Discretizando o modelo do ANSYS® com até 12.000 elementos sólidos o resultado tende a convergir para o presente modelo. Enfatiza-se que o elemento sólido, usado neste exemplo, possui elevada razão de aspecto; o que contribui o problema de *locking* de cisalhamento, degradando os resultados do modelo executado no ANSYS®.

Tabela 15 – Comparação do potencial elétrico (V) nos sensores da placa de Abreu.

| Sensor | Abreu<br>(336 elem.) | Ansys<br>(750 elem.) | Ansys<br>(3.000 elem.) | Ansys<br>(12.000 elem.) | Presente<br>(336 elem.) |
|--------|----------------------|----------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1      | 0,0162               | 0,0075               | 0,0117                 | 0,0122                  | 0,0125                  |
| 2      | -0,0162              | -0,0074              | -0,0116                | -0,0121                 | -0,0129                 |
| 3      | -0,0162              | -0,0074              | -0,0116                | -0,0121                 | -0,0129                 |

Neste item foi apresentada uma análise estática como forma de validar o modelo de elementos finitos e teorias apresentadas nesta dissertação. Os resultados foram bastante satisfatórios, mostrando-se coerentes com os já existentes na literatura. Segue-se agora para o procedimento de análise modal do sistema.

## 6.2 Análise Modal

Nesta etapa pretende-se validar o modelo dinâmico apresentado. A análise modal de alguns sistemas é realizada. Um comparativo das frequências de ressonância para o sistema sem piezelétrico e com piezelétrico é realizado. A diferença entre as frequências naturais do sistema em circuito aberto e circuito fechado são observadas com mais detalhe.

### 6.2.1 Viga Espessa Coberta com Piezelétricos

Uma análise dinâmica é agora realizada na viga espessa engastada analisada estaticamente no item 6.1.3acima. A densidade de massa para alma de alumínio é  $\rho_{al} = 2700 \text{ Kg/m}^3$ , e para as placas piezelétricas é  $\rho_{pzt} = 7750 \text{ Kg/m}^3$ . Antes de prosseguir com os testes da viga com piezelétrico, uma análise de convergência para o modelo da viga de alumínio puro é realizada. Três modelos são testados, cada um contendo 10, 20 e 30 elementos longitudinais, respectivamente. Os resultados das quatro primeiras frequências de vibração de flexão para viga são mostrados na Tabela 16 a seguir.

Tabela 16 – Convergência da frequência de vibração para viga em flexão.

| <i>Nº de Elementos</i> | <i>Modo 1 (Hz)</i> | <i>Modo 2 (Hz)</i> | <i>Modo 3 (Hz)</i> | <i>Modo 4 (Hz)</i> |
|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 10x1                   | 1373,9             | 7666,1             | 18753,5            | 31842,2            |
| 20x1                   | 1373,9             | 7665,5             | 18744,1            | 31791,2            |
| 30x1                   | 1373,9             | 7665,5             | 18743,6            | 31788,4            |

Nota-se que 20 elementos são suficientes para determinar até a quarta frequência natural de flexão com precisão na casa das dezenas, até a terceira frequência com precisão na unidade e, a segunda e a primeira com precisão em décimos. Os modos de flexão da viga para o modelo com vinte elementos são ilustrados na Figura 6.13 a seguir.

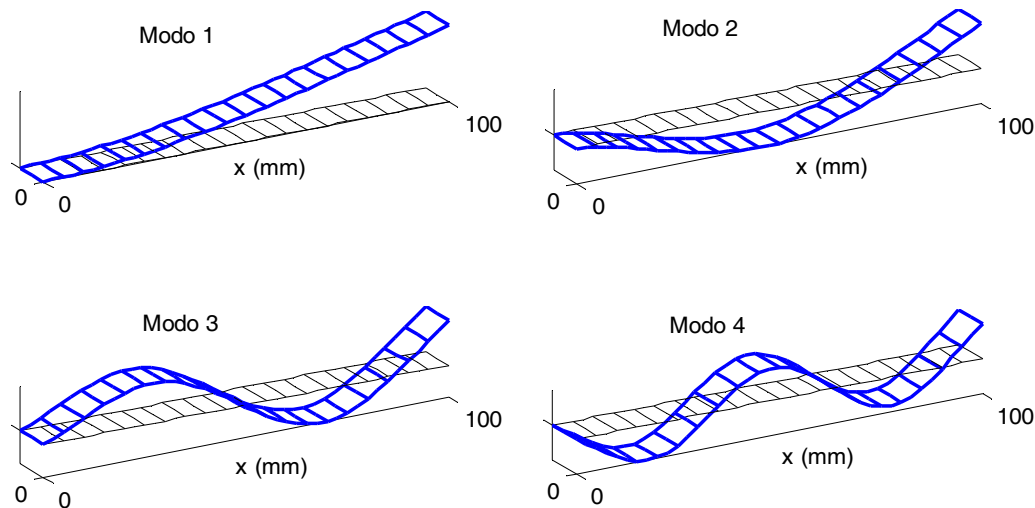


Figura 6.13: Modos de flexão para viga sem piezelétricos, usando 20 elementos.

Assim o modelo com 20 elementos é selecionado para continuar os testes. O próximo teste visa determinar a alteração sofrida no sistema pelo acréscimo das lâminas piezelétricas. Estas modificam o sistema tanto mecanicamente, pelo acréscimo de massa e rigidez, quanto eletricamente, estando o sistema em circuito aberto ou em circuito fechado. Os resultados são vistos a seguir.

Tabela 17 – Alteração das frequências naturais da viga devido ao sanduíche piezelétrico.

| <i>Frequência (Hz)</i> | <i>Viga de Alumínio</i> | <i>Viga Sanduíche</i> |                 |
|------------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------|
|                        |                         | Circuito fechado      | Circuito aberto |
| Modo 1                 | 1373,9                  | 1359,6                | 1459,3          |
| Modo 2                 | 7665,5                  | 7373,7                | 7804,3          |
| Modo 3                 | 18744                   | 17647                 | 18483           |
| Modo 4                 | 31790                   | 29430                 | 30560           |

Pode-se observar na Tabela 17 que as lâminas piezelétricas, em circuito fechado, reduzem ligeiramente as frequências naturais da viga de alumínio. Isto ocorre devido à baixa relação rigidez-massa do piezelétrico em relação ao alumínio. Vale ressaltar que os modos de vibração e frequências naturais em circuito fechado não sofrem nenhuma influência do acoplamento piezelétrico. Contudo, em circuito aberto vê-se a influência do acoplamento piezelétrico, elevando as frequências naturais do sistema por um acréscimo de rigidez de origem piezelétrica.

Considere agora a mesma viga contendo eletrodos distribuídos na lâmina piezelétrica. A Figura 6.14 mostra um exemplo para 10 eletrodos. Cada eletrodo pode ser posto em

curto-circuito individualmente. Pretende-se analisar a influência da percentagem de piezelétrico em circuito aberto ou fechado ao longo da viga na frequência natural do sistema.

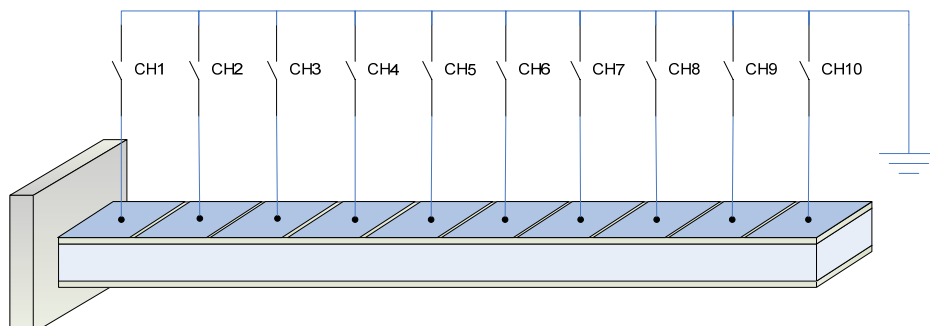


Figura 6.14: Viga sanduíche com eletrodos distribuídos. Chave fechada curto-circuita os piezelétricos.

O gráfico da Figura 6.15 mostra a variação da frequência natural da viga pondo os eletrodos em curto-circuito um por vez, do engaste para a ponta livre. Ou seja, fechando-se as chaves na Figura 6.14 de CH1 a CH10 tal que ao final do processo 100% dos eletrodos estão em curto-circuito.

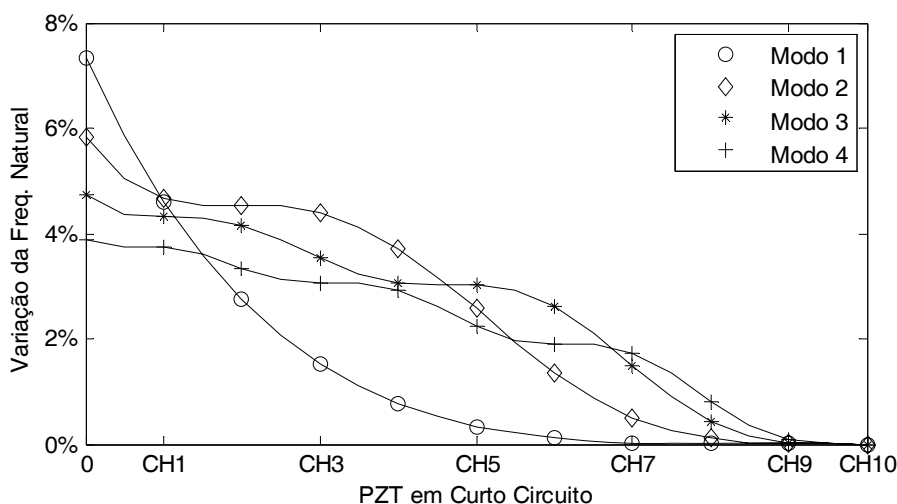


Figura 6.15: Efeito do enrijecimento da viga devido ao acoplamento piezelétrico. O fechamento do circuito ocorre do engaste para ponta livre.

É possível notar na Figura 6.15 que as maiores variações na frequência fundamental ocorrem próximo ao engaste, enquanto que piezelétricos próximos a ponta livre não possuem quase nenhuma influência na frequência fundamental. Na segunda frequência de vibração as maiores variações ocorrem aproximadamente no meio da viga. E nas demais frequências as variações caem de forma oscilante, do engaste a ponta da viga.

Na Figura 6.16 abaixo é realizada a análise reversa com fins de verificar se a ordem de fechamento do circuito tem alguma influência na dinâmica do problema. Assim os eletrodos são postos em curto-circuito da ponta livre para o engaste (fechando-se as chaves na Figura 6.14 de CH10 a CH1).

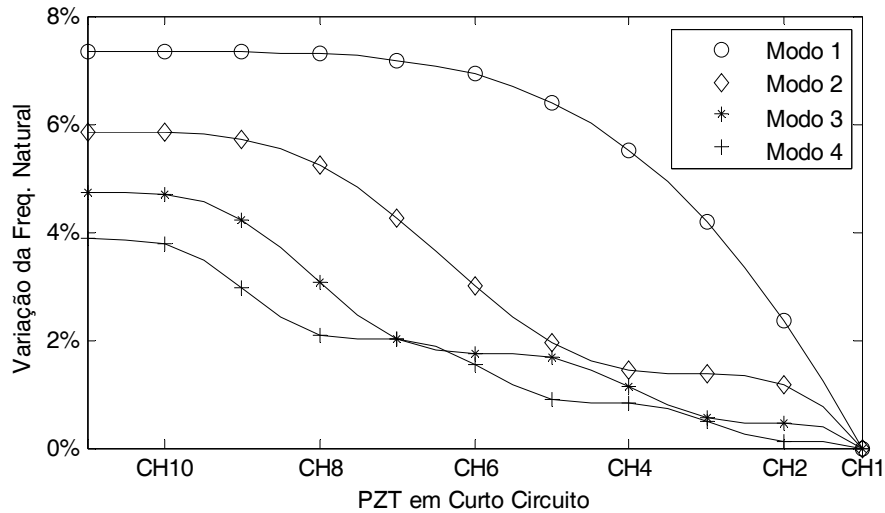


Figura 6.16: Efeito do enrijecimento da viga devido ao acoplamento piezelétrico. O fechamento do circuito ocorre da ponta livre para o engaste.

É possível verificar, na Figura 6.16, o mesmo padrão ocorrido anteriormente; donde as maiores variações na frequência fundamental ocorrem quando as chaves próximas ao engaste são acionadas. Uma análise com critério pode demonstrar que a posição do pieze-létrico na viga afeta a frequência de vibração de forma mais significativa que a quantidade de lâminas cobrindo a viga.

### 6.2.2 Placa Fina com Pastilhas Piezelétricas

A análise modal para a placa fina modelada por Abreu (2003), testada estaticamente no item 6.2.2, é realizada a seguir. Um esquema da placa pode ser visto na Figura 6.9. As propriedades dos materiais foram anteriormente citadas e podem ser vistas nas Tabelas Tabela 8 e Tabela 14, excluindo-se as densidades de massa que são:  $\rho_{placa} = 7870 \text{ Kg/m}^3$ ,  $\rho_{PZT} = 7700 \text{ Kg/m}^3$  e  $\rho_{PVDF} = 1780 \text{ Kg/m}^3$ , para a placa, o PZT e o PVDF respectivamente.

Uma análise de convergência, não mostrada, verifica que a discretização da placa em oito por doze divisões é suficiente para representar as quatro primeiras frequências naturais. Entretanto, uma discretização mais refinada, dezesseis por vinte e quatro, é usada para representar melhor as deformações nos atuadores e sensores. As duas malhas são mostradas a seguir.

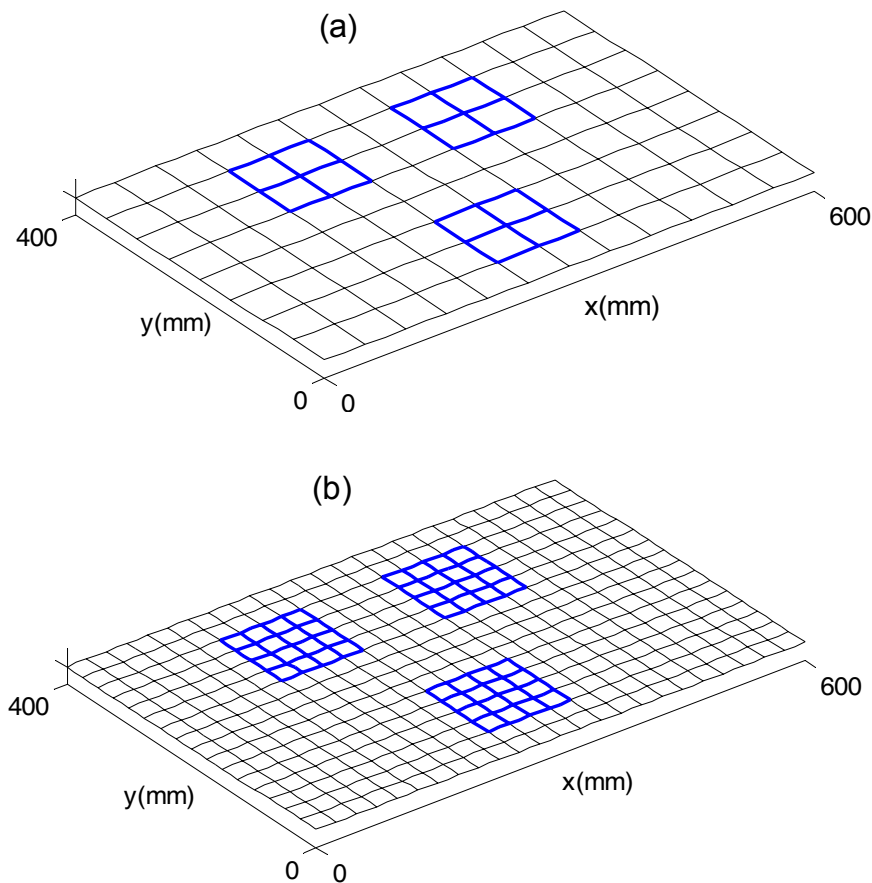


Figura 6.17: Malhas para a placa de Abreu (a) 8x12 (b) 16x24 elementos. Os três pares de atuador/sensor estão pintados na cor azul em linhas espessas.

Os resultados das quatro primeiras frequências naturais para a placa, a placa incluindo os transdutores em circuito fechado e a placa com os transdutores em circuito aberto, são mostrados na Tabela 18.

Tabela 18 – Alterações das frequências naturais da placa devidas as pastilhas piezelétricas.

| Frequência (Hz) | Placa   | Placa com Transdutores |                         |
|-----------------|---------|------------------------|-------------------------|
|                 |         | Circuito fechado       | Circuito aberto         |
| Modo 1/1        | 21,9370 | 21,8762 (-2,8 ‰)       | 21,9403 (3,0 ‰) (0,2 ‰) |
| Modo 2/1        | 42,1861 | 42,3441 ( 3,7 ‰)       | 42,4150 (1,7 ‰) (5,4 ‰) |
| Modo 1/2        | 67,4990 | 67,7988 ( 4,4 ‰)       | 68,1647 (5,5 ‰) (9,9 ‰) |
| Modo 2/2        | 87,7460 | 87,6548 ( 1,0 ‰)       | 87,9202 (1,0 ‰) (2,0 ‰) |

Com relação aos resultados, em primeiro lugar há de se observar que as frequências naturais não sofreram variações significativas como as observadas na viga sanduíche do caso anterior. Em relação a isto, deve-se notar que as pastilhas de piezelétricos nesta placa

cobrem apenas 12 % da superfície da placa, e ainda, que a massa total das pastilhas representa um acréscimo de 0,37 % na massa da placa.

Contudo, ainda que pequeno, é possível observar que o modo 2/1 sofreu o maior acréscimo na frequência natural que os demais. Isto porque as pastilhas estão posicionadas próximas aos picos da forma modal, de tal forma que contribui para este modo mais que para os outros.

Na sequência o modo 1/2 sofreu a segunda maior influência na frequência natural. É possível observar que duas das pastilhas estão posicionadas próximo aos picos da forma modal, enquanto que a terceira pastilha encontra-se na linha neutra da forma modal.

Um fato interessante ocorre com o modo 1/1. Nota-se que, em relação ao sistema em circuito fechado, este apresenta um acréscimo na frequência natural maior que o modo 2/2. Contudo quando a influência da massa das pastilhas é analisada percebe-se que ocorre uma redução na frequência natural do modo 1/1 e a influência total dos piezelétricos acaba sendo reduzida para este modo.

As formas modais da placa com transdutores em circuito aberto são mostradas na Figura 6.18 na página seguinte.



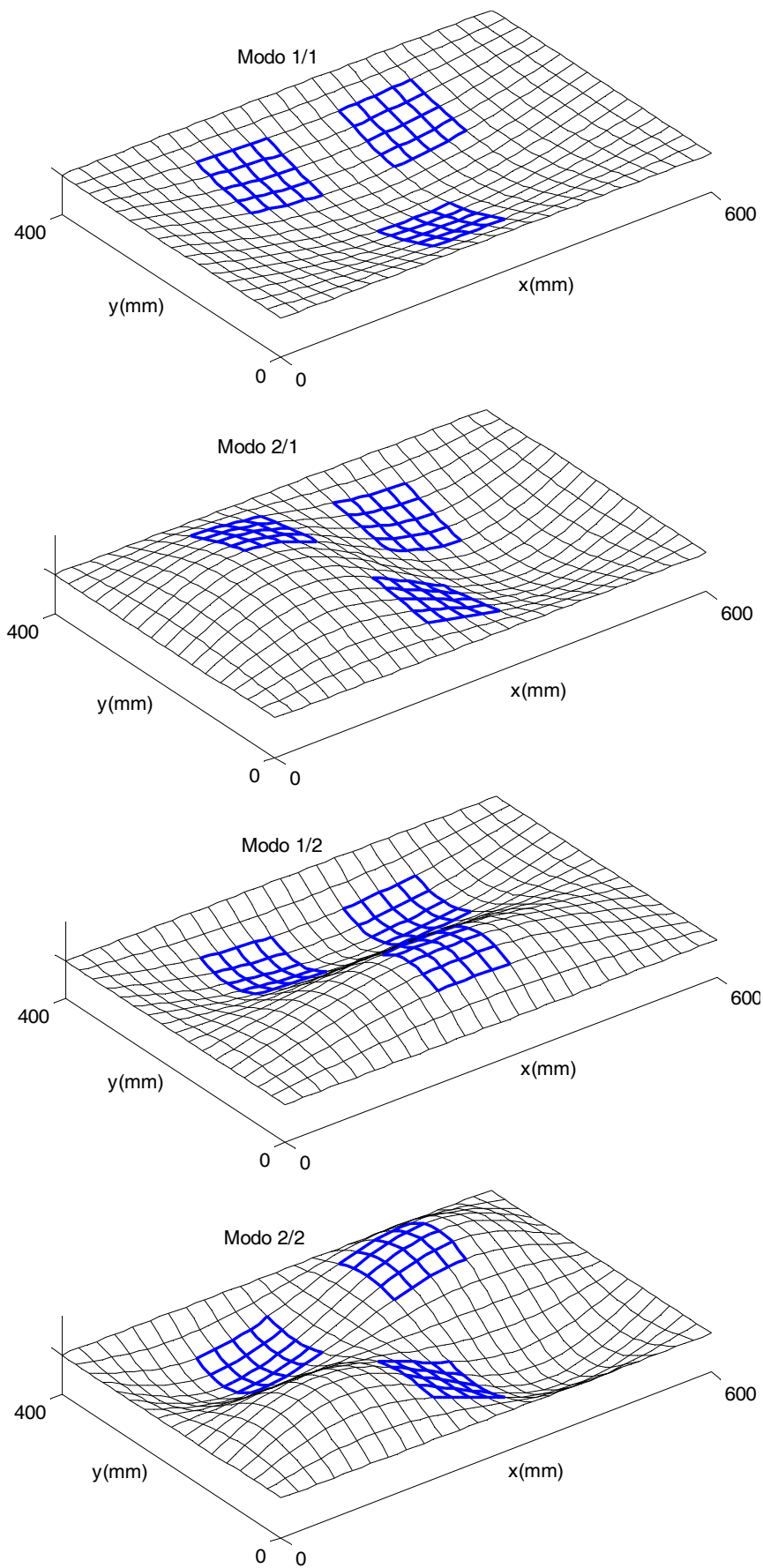


Figura 6.18: Modos de vibração para placa com três pares de transdutores.

### 6.3 Análise da Resposta Dinâmica do Sistema Com e Sem Controle

Nesta última etapa serão analisadas as respostas dinâmicas para dois sistemas apresentados anteriormente. O primeiro sistema é a viga engastada livre proposta por Ahmad *et al.* (2006), cuja razão de aspecto induz ao uso da teoria de primeira ordem para cisalhamento da viga. O segundo sistema consiste da placa fina proposta por Abreu (2003) simplesmente apoiada nos quatro lados. Ambos os sistemas foram previamente estudados e detalhados nas seções anteriores, tanto na validação estática quanto na análise modal.

#### 6.3.1 Viga Espessa Coberta com Piezelétricos

Para esta viga serão estudadas três configurações de piezelétricos, a saber: (a) viga totalmente coberta por um par de piezelétricos; (b) viga com uma única pastilha de piezelétricos próxima ao engaste; e (c) viga coberta por cinco pastilhas piezelétricas igualmente distribuídas por toda a viga (ver Figura 6.19). Para todas essas configurações o piezelétrico inferior é usado como sensor e o piezelétrico superior como atuador.

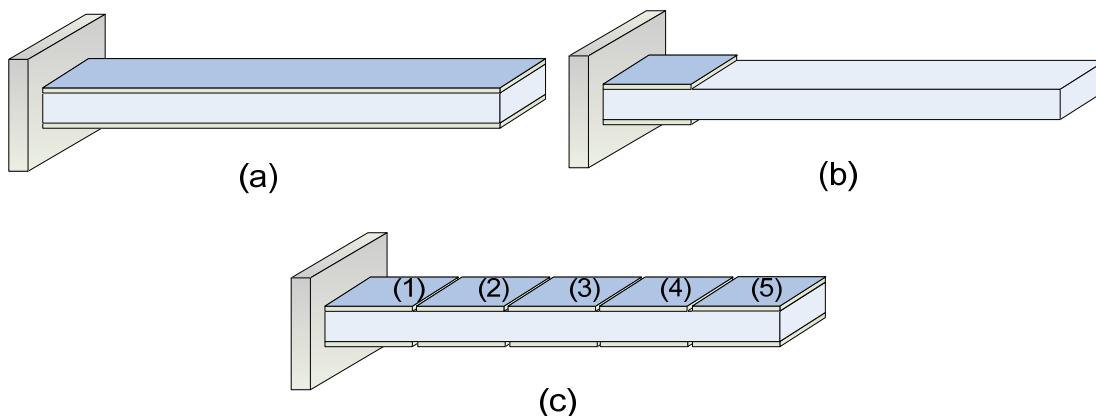


Figura 6.19: Vigas de teste. (a) Coberta com um par de atuador/sensor; (b) coberta com uma pastilha de atuador/sensor próxima ao engaste; (c) viga com cinco pastilhas de atuador/sensor distribuídas.

Primeiro será estudada a resposta do sistema sob uma força de perturbação harmônica, de 1 N a 500 Hz, imposta na ponta da viga. A perturbação perdura por um período de 50 ms quando então é desligada para que a viga seja deixada em movimento harmônico livre.

Todos os gráficos a serem apresentados mostram comparações entre os sistemas controlados e os sistemas não controlados. As matrizes de ganhos para o controlador é determinado pela técnica LQR e as matrizes de ponderação são obtidas pela regra de Bryson. Neste caso foi posto como critério de controle que os atuadores trabalhem a 50 V e que o

desempenho desejado fosse um deslocamento inferior a 1 nm em qualquer ponto da viga. Note que estes valores representam apenas critérios de projeto, não significa que os mesmos serão atingidos; tal afirmação ficará evidente na análise dos gráficos que seguem. O amortecimento proporcional foi incluído e os parâmetros de  $\alpha$  e  $\beta$  calculados para os valores  $\omega_1 = 10\text{Hz}$ ,  $\xi_1 = 0,45 \times 10^{-5}$  e  $\omega_2 = 200\text{Hz}$ ,  $\xi_2 = 0,7 \times 10^{-5}$ .

Nas páginas seguintes, a Figura 6.20, a Figura 6.21 e a Figura 6.22 mostram os resultados no domínio do tempo para o caso da perturbação harmônica estudado nas três configurações. As figuras mostram o gráfico do deslocamento na ponta da viga seguido do gráfico da ação de controle (potencial elétrico nos atuadores). No detalhe dos gráficos da ação de controle, na Figura 6.20 e Figura 6.21, é mostrado o potencial elétrico para suprimir a vibração no regime harmônico livre. Na Figura 6.22 o detalhe mostra o potencial elétrico para os cinco atuadores no regime forçado.

Verifica-se nas figuras que é possível atenuar a vibração em todas as configurações propostas. Na Figura 6.20 e na Figura 6.21 observa-se que as componentes de vibração própria da viga foram totalmente suprimidas, sobrando apenas a componente da força de perturbação harmônica (apesar desta ter sido bastante atenuada). Ainda nestas figuras, há de se notar que a ação de controle no atuador da viga (b) dobrou em relação à viga (a), mas a atenuação não foi tão eficiente. Contudo a viga (b) possui 80% menos piezelétrico. Conclui-se que mesmo com um piezelétrico pequeno é possível atenuar vibrações a níveis desejados desde que seja possível providenciar a energia necessária. Nos detalhes a vibração harmônica livre é atenuada a “zero” em 0,5 milisegundos.

Na Figura 6.22 tanto as componentes de vibração própria quanto a perturbação harmônica foram totalmente atenuados. No detalhe da ação de controle é possível observar que os atuadores próximos ao engaste têm maior ação de controle que os da ponta livre. A parte de vibração livre é imediatamente controlada, não sendo visível no gráfico mostrado.

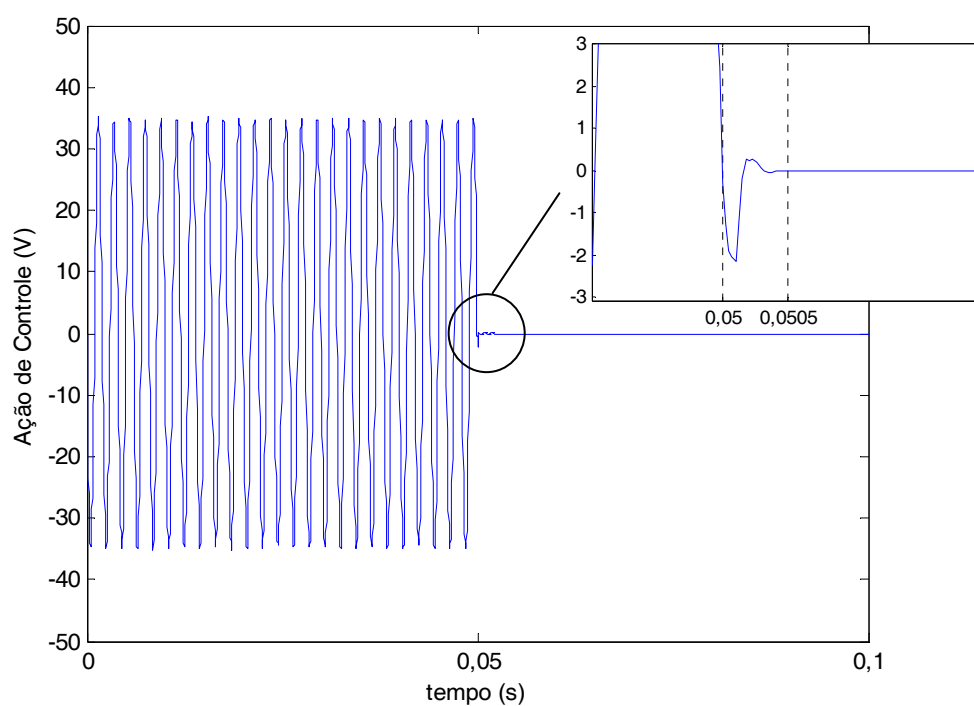
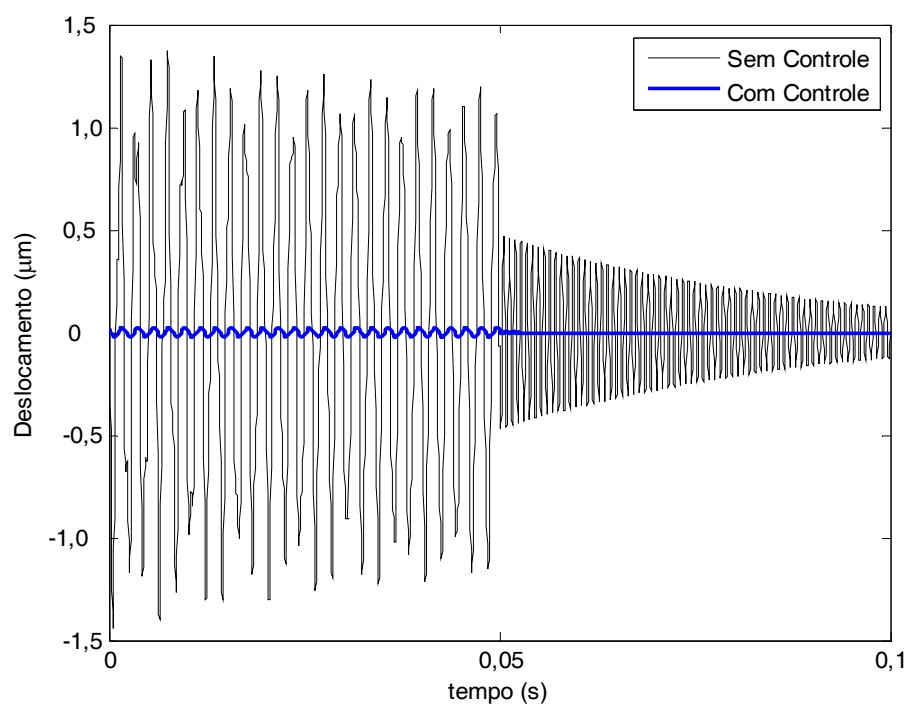


Figura 6.20: Resposta no tempo para viga totalmente coberta por um único par de piezelétricos.

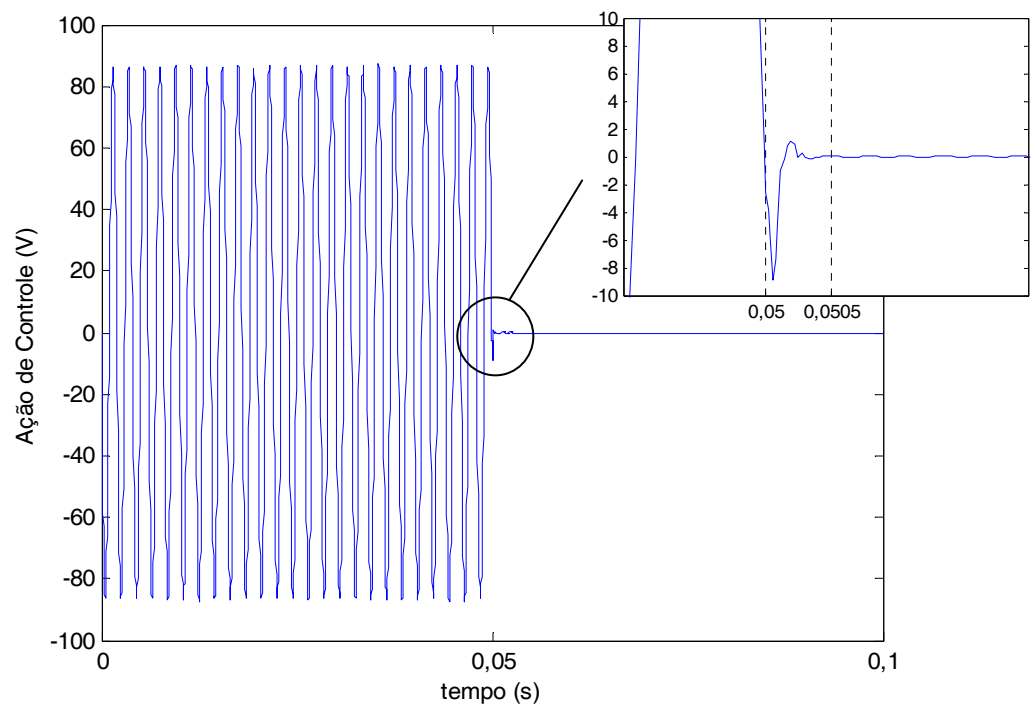
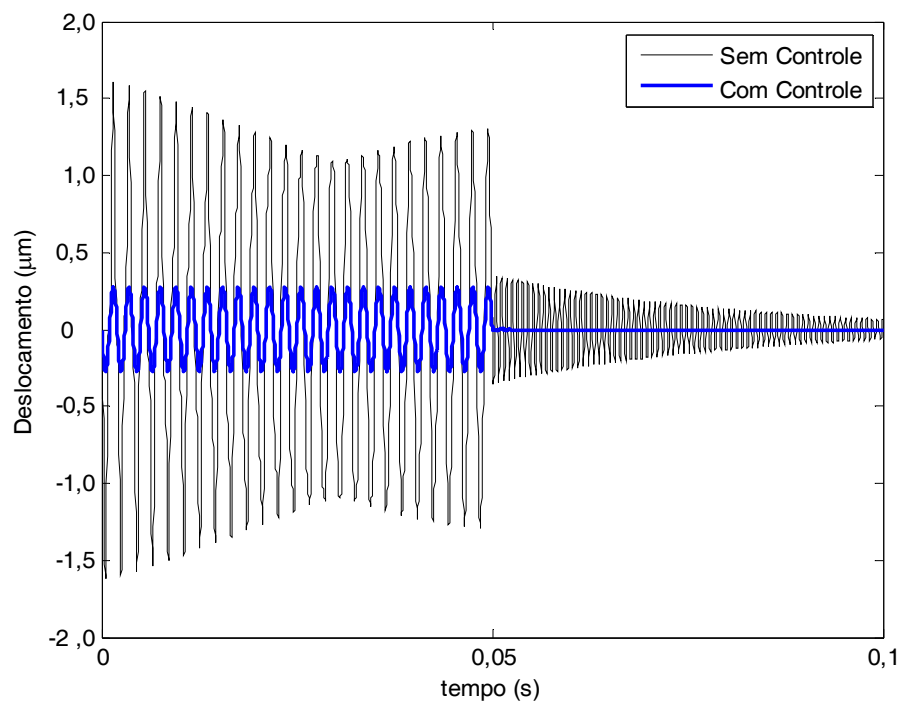


Figura 6.21: Resposta no tempo para viga com um único par de pastilhas piezelétricas próximo ao engaste.

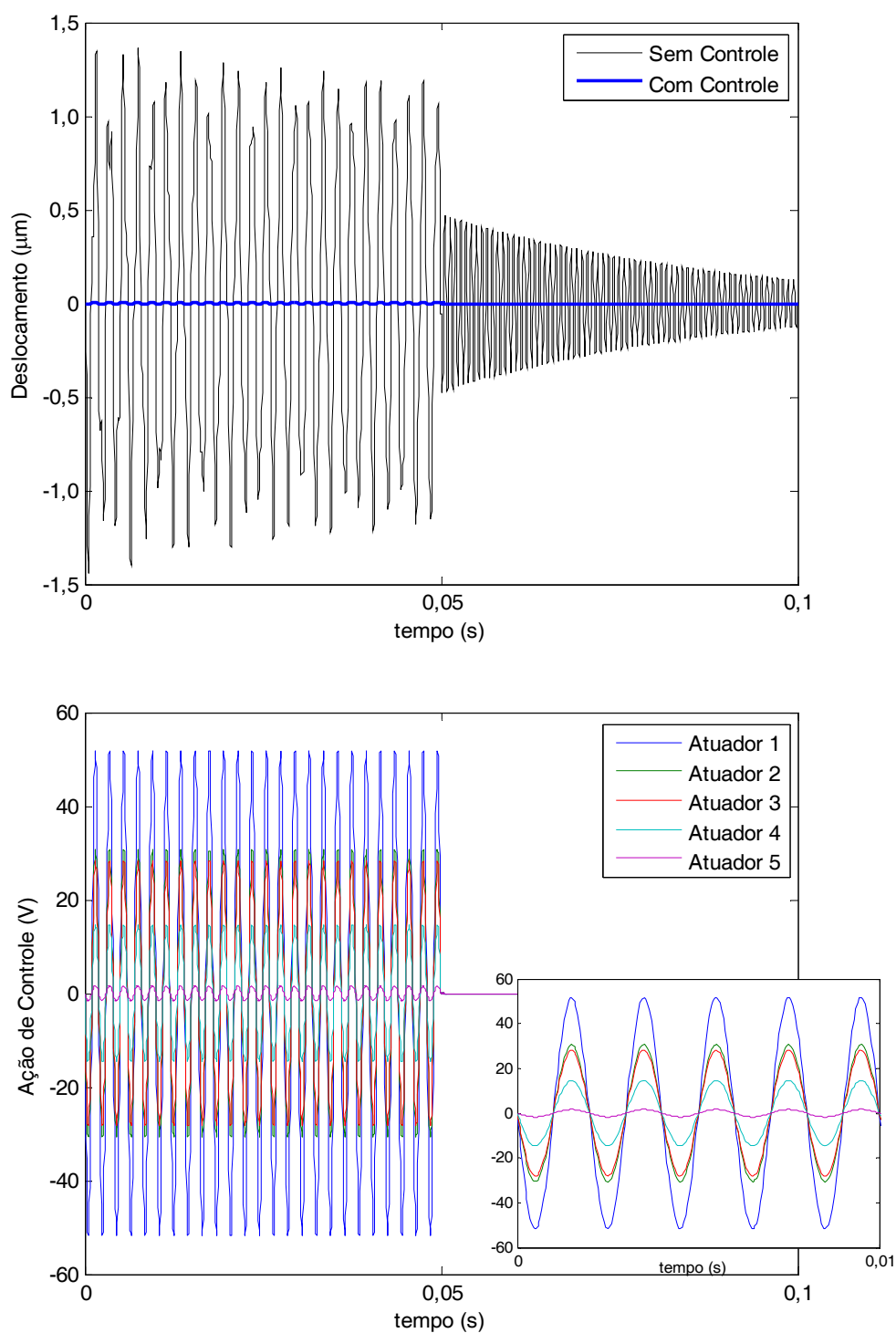


Figura 6.22: Resposta no tempo para viga com cinco pares de pastilhas piezelétricas cobrindo toda viga.

Outra forma de se analisar um sistema vibrante e/ou um sistema de controle é através dos gráficos de resposta em frequência do sistema. Dessa forma é possível analisar a resposta do sistema para uma faixa de frequência específica. Nos gráficos a seguir são mostrados os diagramas de Bode (Magnitude) para as três configurações estudadas. As respostas são obtidas através da função de transferência entre o deslocamento e a força de perturbação, ambos na ponta da viga. São avaliados os sistemas com e sem controle.

No caso em que o atuador cobre toda a viga, Figura 6.23, nota-se uma redução de aproximadamente 30 dB nas baixas frequências (abaixo da frequência fundamental). No caso em que se tem apenas uma pastilha de atuador próximo ao engaste, Figura 6.24, a atenuação cai para aproximadamente 15 dB. É interessante observar que, mesmo com um atuador, é possível “anular” todas as frequências de ressonância da viga. A contrapartida é que, em altas frequências ocorre uma amplificação da perturbação. Este problema pode ser balanceado pelo ajuste dos parâmetros de ponderação do LQR.

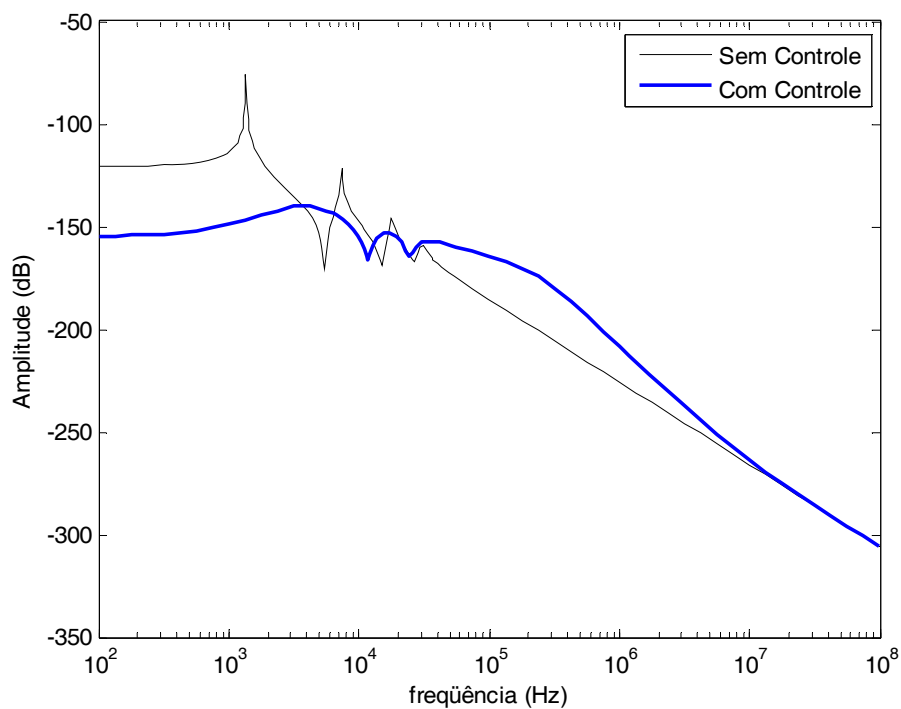


Figura 6.23: Reposta em frequência para viga totalmente coberta por um único par de piezelétricos.

No caso da viga com cinco atuadores piezelétricos, Figura 6.25, uma extraordinária atenuação de aproximadamente 140 dB foi obtida em ampla faixa de frequência. Nota-se que os cinco atuadores anularam efetivamente todas as frequências naturais da viga. Outra vantagem deste sistema é que o mesmo não apresenta o efeito de amplificação em altas frequências, e as altas frequências são atenuadas a 60 dB/dec. A contrapartida deste sistema é o alto custo tecnológico em equipamentos.

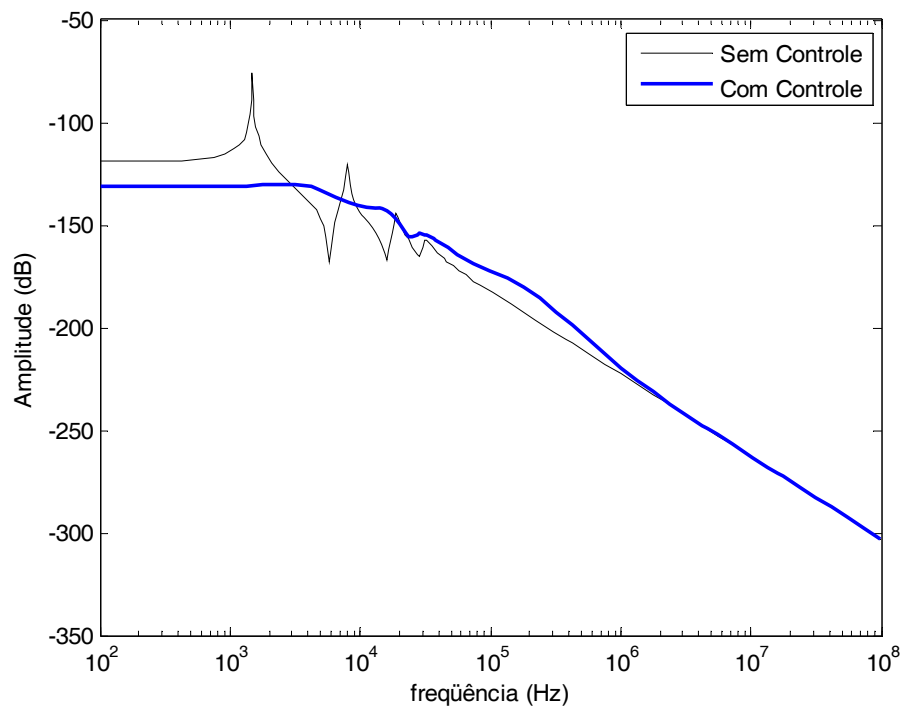


Figura 6.24: Resposta em frequência para viga com um único par de pastilhas piezelétricas próximo ao engaste.

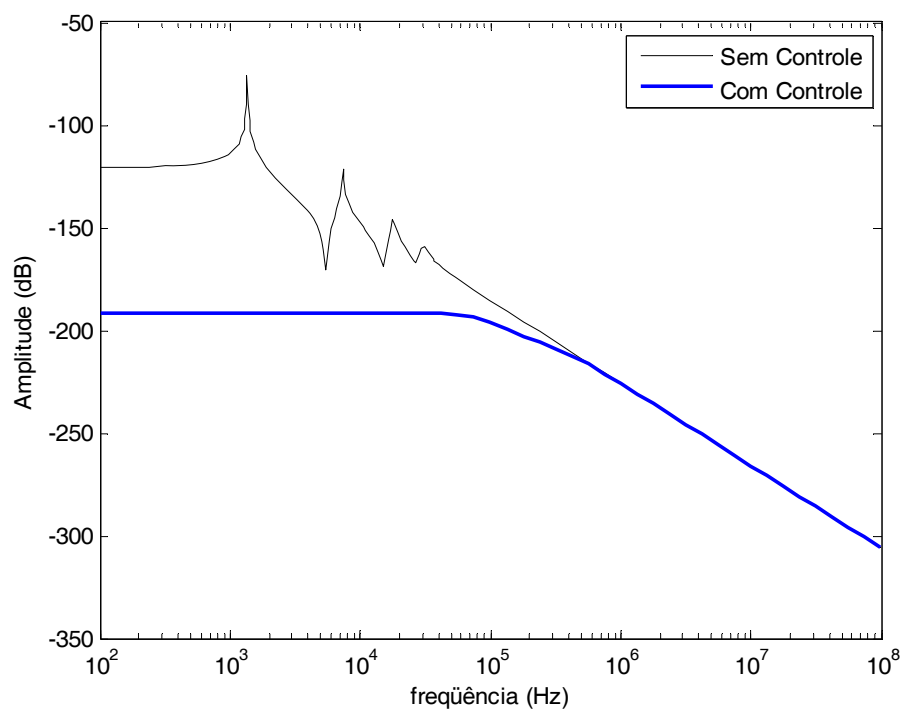


Figura 6.25: Resposta em frequência para viga com cinco pares de pastilhas piezelétricas cobrindo toda viga.



Nos gráficos acima foram analisados o comportamento do sistema a sinais harmônicos bem comportados. Contudo sistemas reais são sujeitos a perturbações mecânicas diversas. Assim o desempenho do sistema de controle é analisado sob a ação de uma perturbação do tipo ruído branco. Para tal, é usado o bloco de ruído branco com banda limitada presente no Simulink® em que os dados de entrada são: tempo de amostragem do sinal de 20KHz e, potência do ruído em 0,0001 dB. Para este caso será analisado somente a viga com cinco atuadores distribuídos.

Na primeira análise, Figura 6.26 na página 136, os parâmetros de projeto para o controlador desenvolvido nos testes acima foram mantidos, e apenas foi acrescentado um limite de corte para a ação de controle a 100 V, simulando um limite físico do amplificador de potência usado no sistema. A resposta do deslocamento do sistema com controle pode ser comparado com o sistema sem controle no gráfico da próxima página. No gráfico da ação de controle, observa-se que para a banda de potência do sinal de perturbação e critério de desempenho desejado, os atuadores trabalharam quase 100% do tempo na zona de corte. No detalhe é possível observar os sinais de cada atuador no limite de corte. Apesar de os atuadores trabalharem na zona de corte, os mesmos mostram-se efetivos no controle da vibração, atenuando significativamente o ruído de perturbação.

Para verificar o desempenho do sistema trabalhando fora da região de saturação do amplificador foi realizada uma segunda análise, donde os resultados podem ser vistos na Figura 6.27 na página 137. Neste caso o limite de corte do potencial elétrico fornecido Pelo amplificador de potência para os atuadores foi aumentado para 150 V. Nota-se que ocorre um melhor controle na região onde a potência do ruído é menor. Nesta região, percebe-se pelo gráfico da ação de controle que o atuador próximo ao engaste (atuador 1) é o mais solicitado que os atuadores próximos à extremidade livre. Quando a potência fornecida ao atuador 1 não é suficiente para atenuar o ruído, entrando em saturação, rapidamente os demais atuadores são forçados a numa tentativa de balancear o sistema e também entram na região de corte.

Em muitos casos não é desejável alterar o nível de saturação dos atuadores, principalmente devido aumento dos custos de equipamento e de operação. Na terceira análise, Figura 6.28, é proposto um novo critério de controle para manter o limite de saturação a 100 V. O parâmetro alterado é o desempenho do deslocamento que foi “relaxado” de 1 nm para 1  $\mu$ m. Novas matrizes de ponderação são calculadas a partir do novo critério de desempenho e um novo controlador LQR é projetado. Os resultados são vistos na página 138. Percebe-se, na Figura 6.28, uma incrível melhora no desempenho do sistema controlado somente devido à alteração do critério de desempenho do controlador LQR. Note que o atuador 1 e o atuador 2 trabalham em boa parte do tempo na região de saturação.

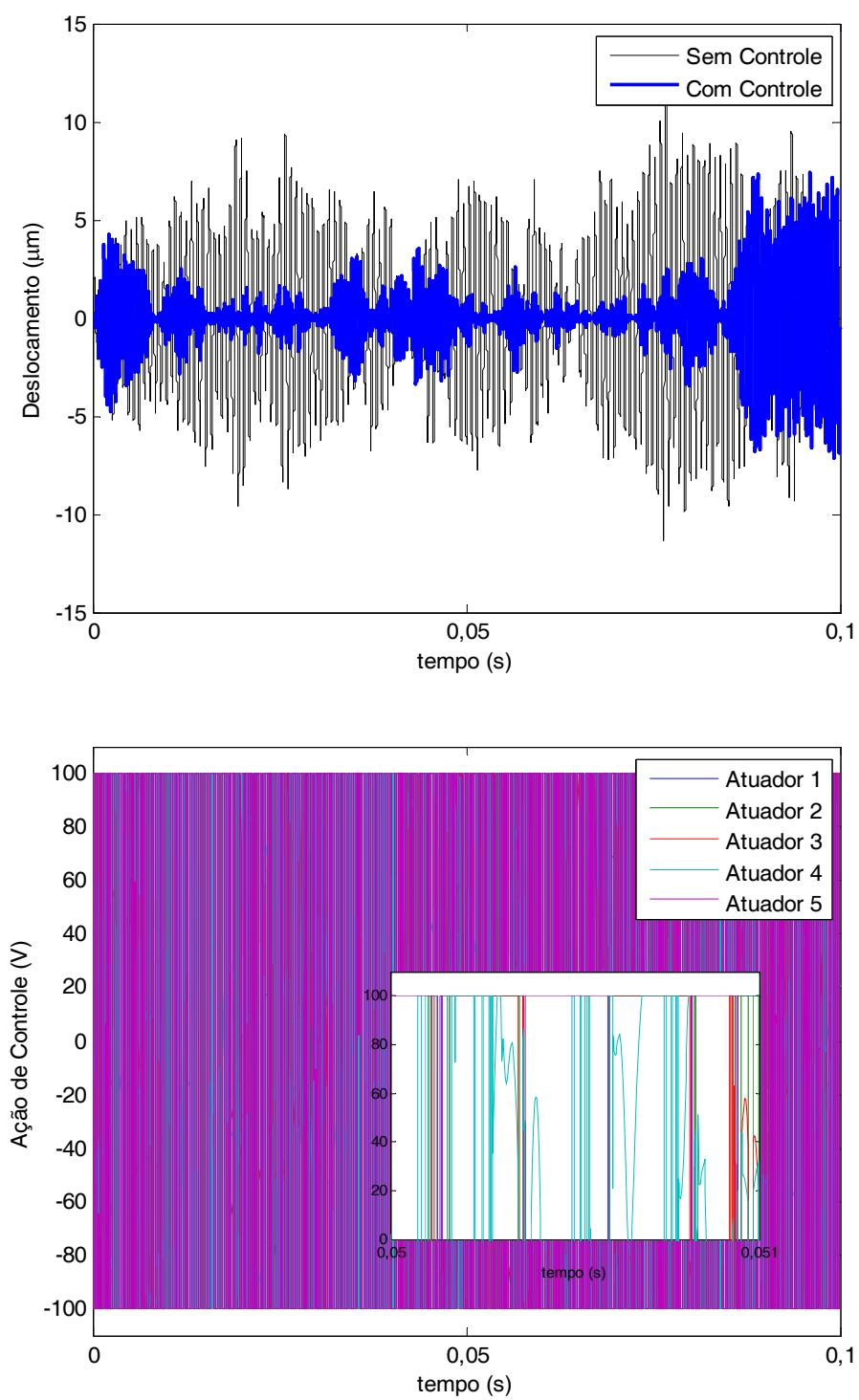


Figura 6.26: Perturbação de ruído branco. Resposta no tempo com atuadores limitados a 100V.

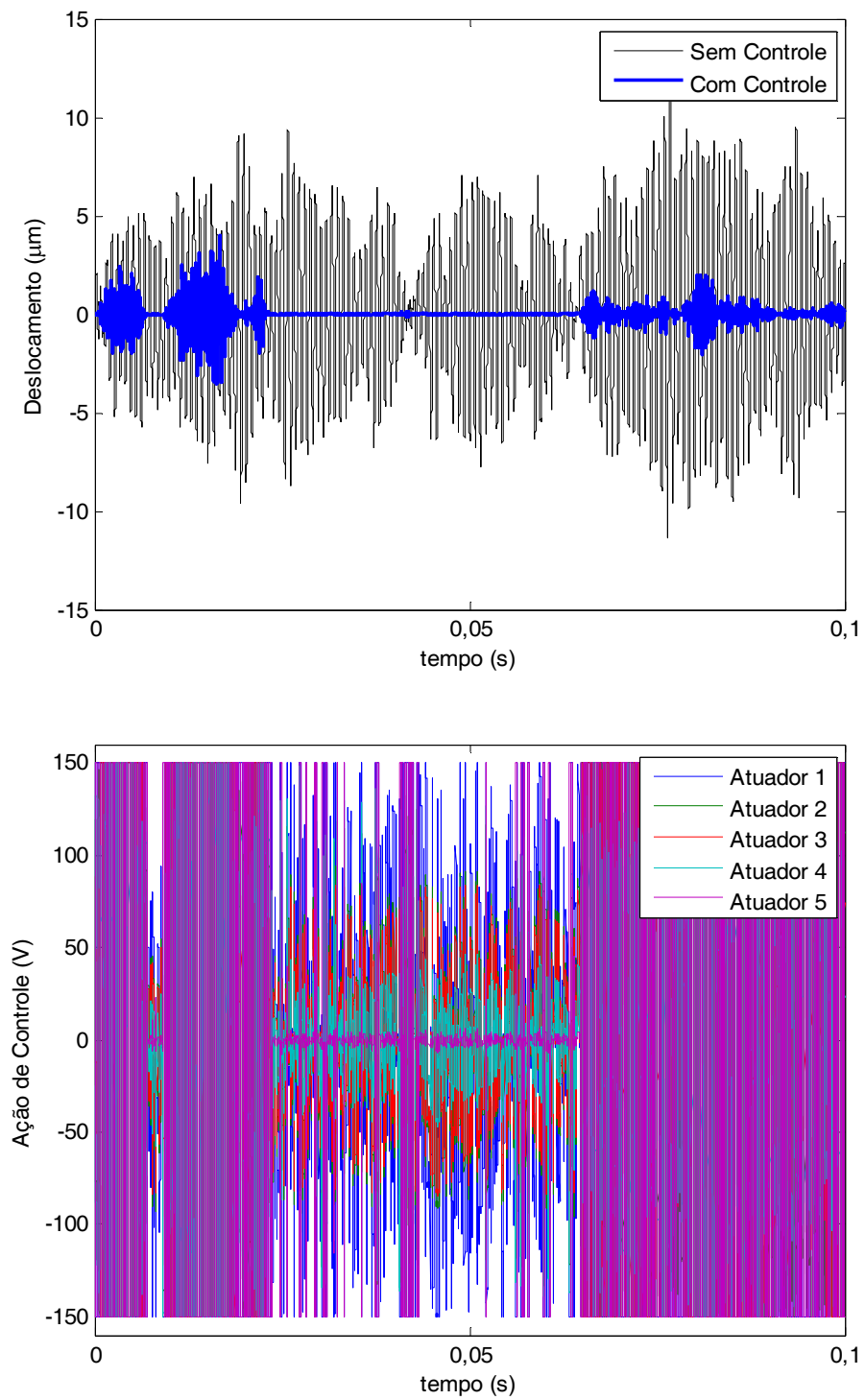


Figura 6.27: Perturbação de ruído branco. Resposta no tempo com atuadores limitados a Limitado a 150 Volts

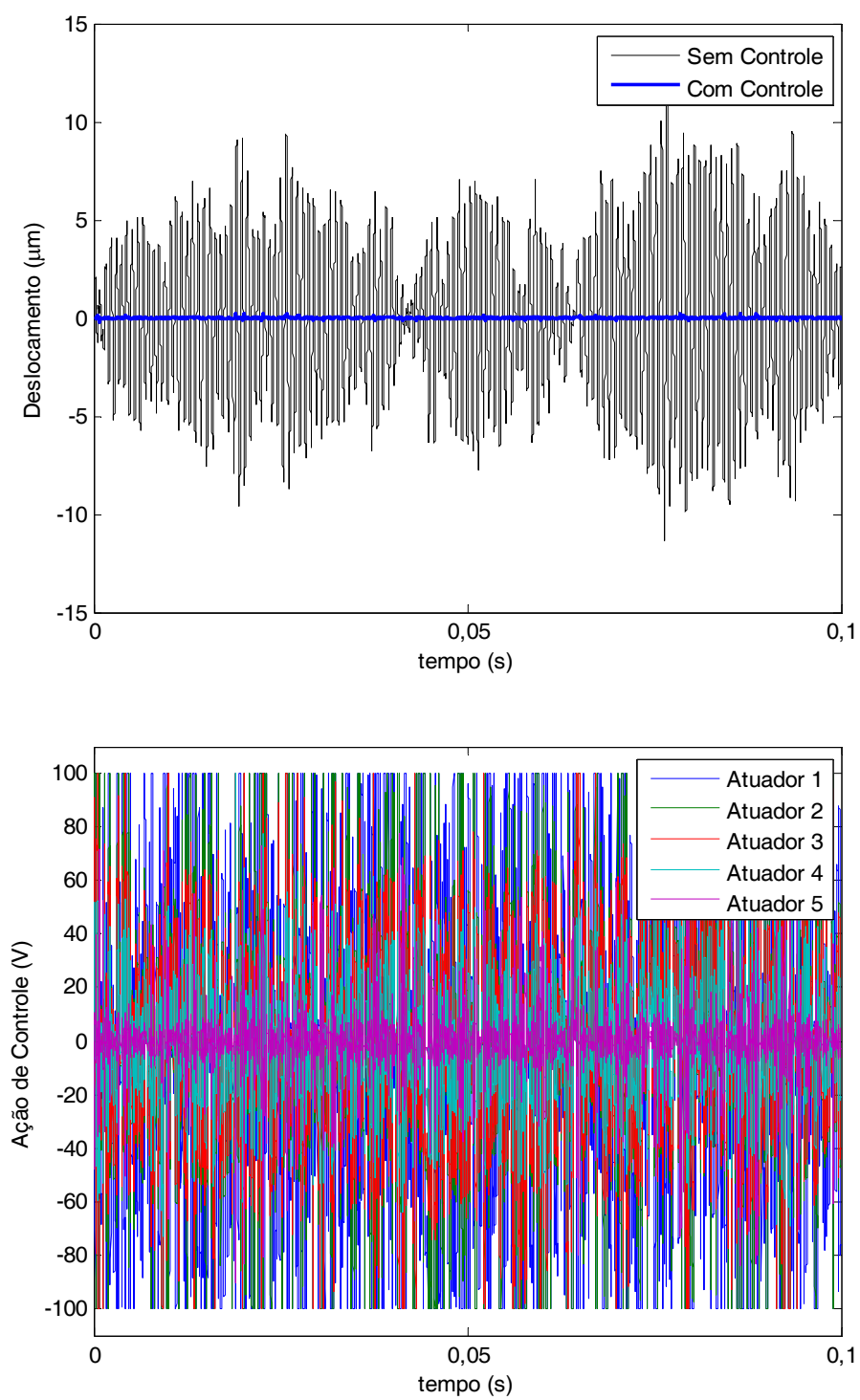


Figura 6.28: Perturbação de ruído branco. Resposta no tempo com atuadores limitados a Limitado a 100 Volts e alteração dos parâmetros do controlador.

No gráfico da Figura 6.29, a seguir, é mostrado a FRF do novo sistema projetado na terceira análise mostrada na Figura 6.28. As características do sistema são análogas as do sistema anterior (Figura 6.25), com a diferença que neste novo sistema a atenuação em baixas frequências é de aproximadamente 25 dB.

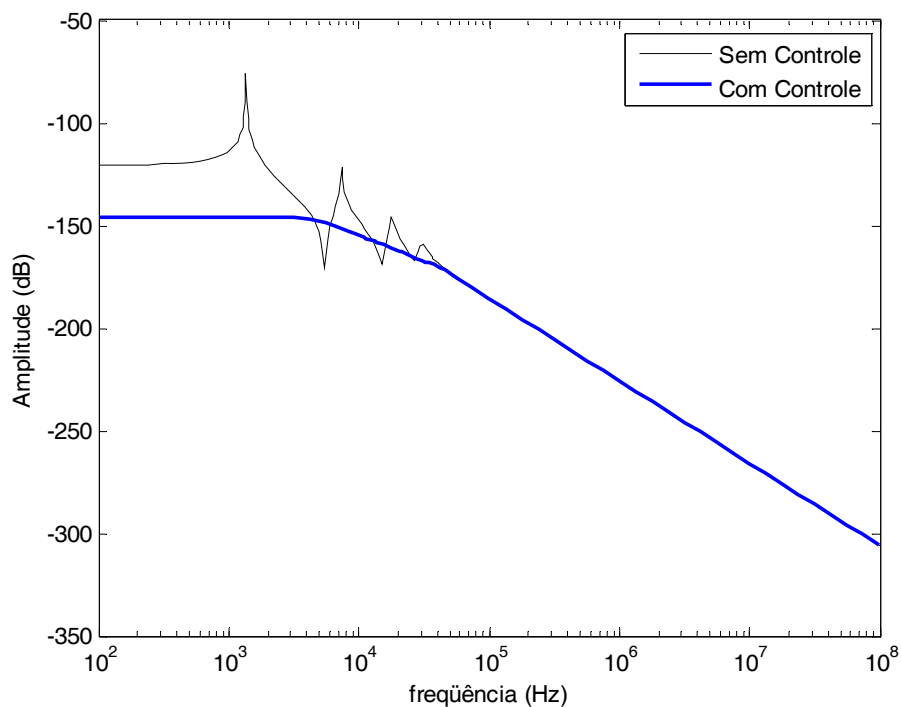


Figura 6.29: Resposta em frequência da viga devido à alteração dos parâmetros do controlador.

Assim, conclui-se que a imposição de um critério de desempenho menos rígido para o deslocamento exigiu menos esforço dos atuadores, possibilitando uma melhora significativa de desempenho em relação ao projeto anterior.

### 6.3.2 Placa Fina com Pastilhas Piezelétricas

Um projeto de controle é apresentado para a placa fina com três pares de pastilhas piezelétricas proposta por Abreu (2003). A técnica de controle LQR é usada no projeto do controlador, e as matrizes de ponderação são determinadas pela regra de Bryson. Os critérios de desempenho para o cálculo das matrizes de ponderação são: amplitude de deslocamento no centro da placa  $u(t) < 1 \mu\text{m}$ ; e potencial elétrico de 100 V nos atuadores.

Primeiro o sistema de controle é testado para uma força de perturbação harmônica de 1 N a 10 Hz. A força é aplicada em  $x = 450 \text{ mm}$  e  $y = 150 \text{ mm}$  conforme a Figura 6.30. Na figura também é mostrada a malha usada, sendo esta a mesma discretização do item de

análise modal. O sistema é truncado com 6 modos de vibração, usados tanto no projeto do controlador quanto para a simulação do sistema.

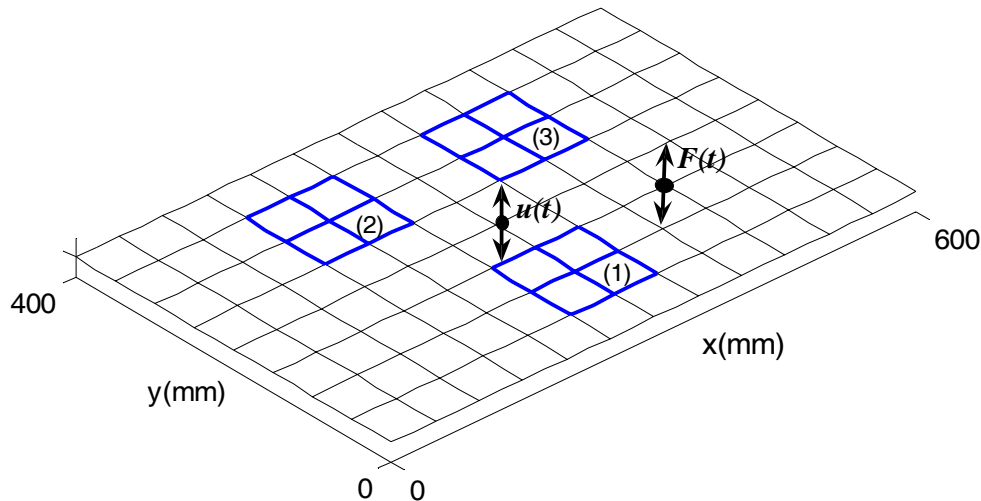


Figura 6.30: Placa fina de Abreu (2003) com os três pares de atuador/sensor, (1), (2) e (3); e o local da perturbação mecânica,  $F(t)$ .

Os gráficos da Figura 6.31, na página seguinte, mostram os resultados no domínio do tempo para a excitação harmônica. Assim como no caso da viga é possível observar que os atuadores foram capazes de atenuar as vibrações da placa, tanto em seus modos próprios como na frequência de perturbação. Nota-se que apenas 12,5% da placa estão coberta por piezelétricos. Na ação de controle o atuador 1 e o atuador 3 obtiveram maior participação na atenuação da vibração. É importante observar que o posicionamento destes atuadores foi escolhido de maneira arbitrária e, portanto, pode não ser um ponto ótimo de controle. Estudos específicos de otimização devem ser levados em conta para uma boa localização dos atuadores, tais estudos são propostos como trabalhos futuros.

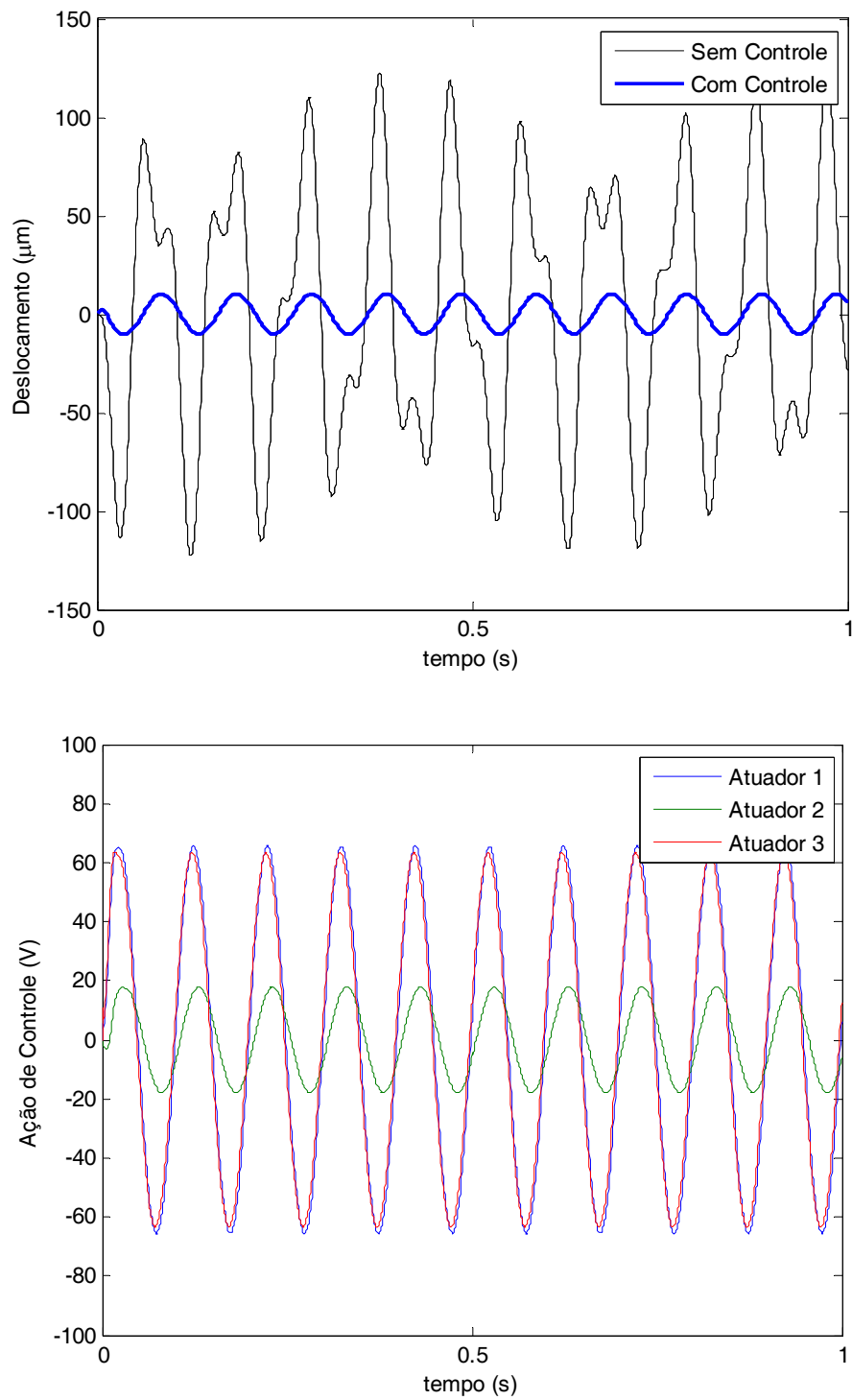


Figura 6.31: Resposta no domínio do tempo para um perturbação harmônica na placa fina com três pares de atuador/sensor.

A seguir é mostrada a FRF para a placa. Apesar de terem sido usados 6 modos de vibração para representar o sistema, apenas quatro frequências de ressonância aparecem no gráfico. Isto acontece porque duas frequências de ressonâncias, pólos do sistema, são canceladas por zeros da função de transferência do sistema. Isto acontece para a relação de entrada e saída escolhida, outra escolha de referencial pode obter diferentes gráficos de FRF. Com relação ao sistema controlado, observa-se que todas as frequências de ressonâncias foram atenuadas, e que, o controle ainda proporciona uma boa atenuação estática do sistema.

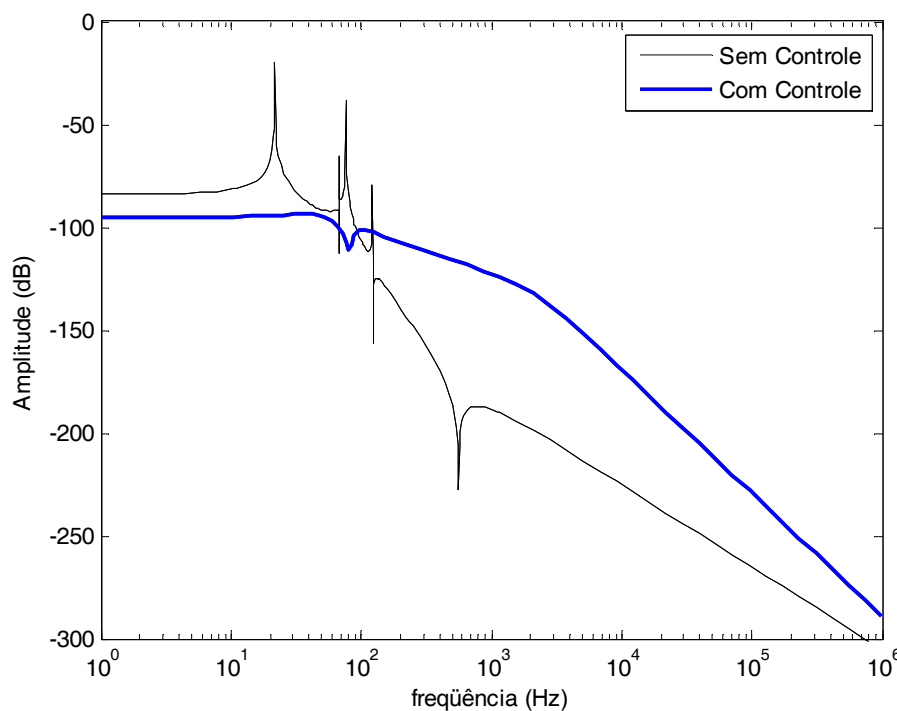


Figura 6.32: Resposta em frequência para a placa fina com três pares de atuador/sensor.

Para concluir foi avaliada a capacidade de atenuação da vibração em todas as faixas de frequências. Para isto foi simulado um ruído branco com um período de amostragem de 0,005 segundos. O resultado do deslocamento no domínio do tempo é mostrado no primeiro gráfico da Figura 6.33 e a ação de controle no segundo gráfico da mesma figura. É observado que o Atuador 3 foi o que mais contribuiu na atenuação das vibrações. Nota-se, ainda, que o Atuador 3 trabalha na região de saturação sem comprometer o desempenho do sistema.



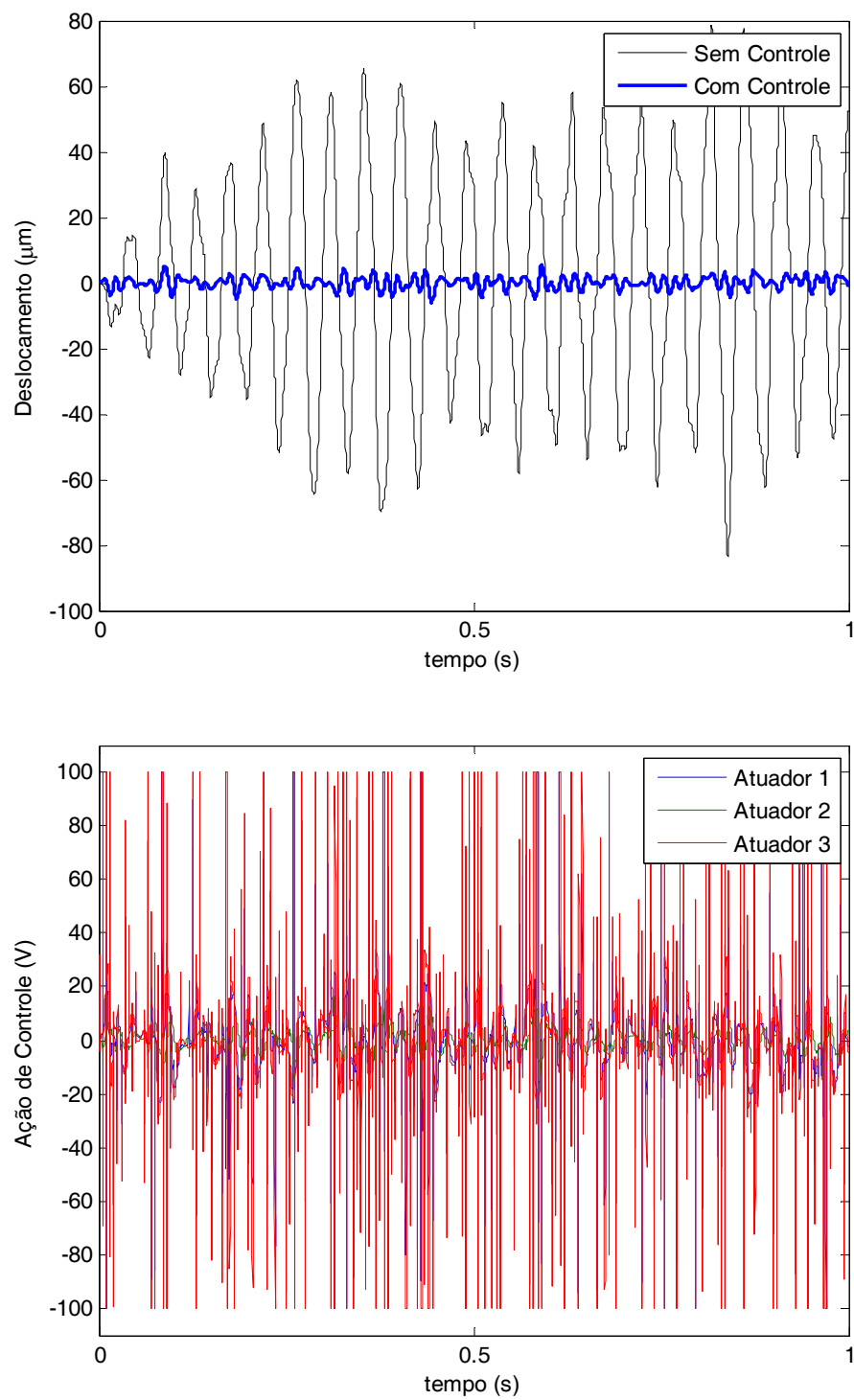


Figura 6.33: Placa fina sujeita a um ruído branco.

Este capítulo propôs a aplicação da teoria desenvolvida nesta dissertação em três etapas. Primeiro foi realizada uma validação da formulação de elementos finitos, em que o programa foi realizado no MATLAB®. Os resultados para deformação estática e potencial elétrico em circuito aberto foram validados por comparação com a literatura. Foram avaliadas uma viga piezelétrica bimorfa, uma viga espessa com pastilhas piezelétricas e uma placa fina com pastilhas piezelétricas. Os resultados de deslocamento mostram boa convergência com a literatura. O potencial elétrico apresenta maiores variações comparando com a literatura, em especial na placa fina modelada por Abreu (2003).

A segunda etapa foi a realização da transformação modal do sistema. Foram comparados os modos de vibração do sistema em circuito aberto e em circuito fechado. A influência do piezelétrico nas frequências naturais do sistema foi avaliada. Os testes foram realizados para a viga espessa e para a placa fina.

A terceira etapa foi obtenção dos resultados dinâmicos do sistema, em que, foram avaliadas a viga espessa e a placa fina. Os modelos foram obtidos usando-se os modos de vibração em circuito fechado. Um controle usando a técnica LQR foi projetado para cada sistema. Foram comparados os sistemas controlados e não controlados usando as ferramentas do MATLAB® e SIMULINK®. O controle mostrou-se eficaz para os sistemas propostos.

## **CAPÍTULO 7**

### **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A presente dissertação tentou englobar amplamente as áreas da engenharia no que tange a piezeletricidade, método dos elementos finitos, vibrações mecânicas, e métodos de controle. Por vezes alguns assuntos foram apresentados de maneira breve e sucinta sem, contudo, comprometer o contexto global da dissertação. Uma ênfase maior foi dada a modelagem do sistema estrutura/piezelétrico usando o método dos elementos finitos e a análise modal. O objetivo foi fornecer modelos adequados ao projeto de controladores.

Uma revisão bibliográfica com trabalhos específicos sobre o assunto norteou o escopo do trabalho. Na sequência, os materiais piezelétricos foram apresentados, onde vários aspectos descritivos foram abordados, tais como: princípio fenomenológico, cristalografia do material, aplicações correntes, aspectos elétricos e, equipamentos eletrônicos para o piezelétrico. Ao fim desta descrição é esperado que o leitor tenha uma visão geral de piezeletricidade e suas aplicações antes que fossem apresentadas as formulações matemáticas.

O método dos elementos finitos, em conjunto com a análise modal, mostrou-se uma ferramenta eficiente capaz de gerar modelos factíveis à simulação dinâmica e ao projeto de controladores. O modelo gerado inclui na sua formulação os transdutores piezelétricos, resultando em modelos eletromecanicamente acoplados.

A teoria de primeira ordem para deformações cisalhantes foi usada para descrever o comportamento cinemático de placas. Esta formulação permite a obtenção de modelos cuja razão espessura/comprimento da estrutura seja tal que o cisalhamento transversal não se torna desprezível. Um modelo de viga espessa usando esta formulação foi elaborado para avaliar os resultados de controle. Ainda que o piezelétrico seja fino comparado com a espessura da viga, o controle mostrou-se eficiente para atenuar as vibrações estruturais. As atenuações ocorreram tanto nos modos próprios de vibração quanto na frequência da perturbação.

O comportamento constitutivo para placa sanduíche, no que concerne aos termos mecânicos, foi obtido usando a teoria de camada equivalente. Da outra parte, os termos constitutivos para as parcelas elétricas foram discretizadas nas faces superior e inferior do sanduíche. A influência mecânica e elétrica dos piezelétricos na dinâmica do sanduíche foi avaliada na análise modal, sendo que a parcela elétrica depende da conexão do circuito elétrico do piezelétrico.

Construiu-se uma formulação de análise modal para o sistema eletromecânico acoplado, resultado da piezeletricidade. Duas hipóteses foram avaliadas. Primeiro foi considerado o piezelétrico sem estar conectado a nenhum tipo de circuito externo (sistema em cir-

cuito aberto). Neste caso o efeito elétrico da piezeletricidade interfere na rigidez estrutural reduzindo a frequência de vibração. A segunda hipótese considera o piezelétrico conectado a um circuito externo, a saber, amplificadores de carga ou potência. Neste caso prova-se que os efeitos elétricos da piezeletricidade não interferem na rigidez do problema dinâmico.

O modelo dinâmico do sistema no espaço modal foi usado para o projeto de controladores LQR. O modelo foi truncado para apenas alguns modos de vibração no projeto de controle. A técnica de Bryson foi usada para determinar as matrizes de ponderação da função de custo do LQR. Esta técnica mostrou-se eficiente para determinar as matrizes de ponderação por um critério de desempenho entre o deslocamento e a solicitação dos atuadores. Apesar do método de controle utilizado obter bons resultados para as aplicações propostas, estudos mais aprofundados em estabilidade e robustez do sistema de controle necessitam ser realizados.

## 7.1 Propostas para Futuros Trabalhos

Algumas propostas de trabalhos futuros são:

- Avaliação experimental da metodologia empregada.
- Uso de não linearidade geométrica para controle de vibração em estruturas flexíveis.
- Avaliação do efeito não linear das constantes piezelétricas quando submetidas a campos elétricos elevados.
- Uso de funções de maior grau na hipótese de potencial elétrico na espessura da placa, comparando com a hipótese linear usada.
- Uso dos transdutores piezelétricos no controle de ondas estruturais.
- Construção de painéis acústicos com material piezelétrico.
- Estudo de falha e fadiga em transdutores piezelétricos.
- Controle de dano estrutural por transdutores piezelétricos.
- Projeto de controle robusto para estruturas com piezelétricos.
- Abordagem de controle por métodos de inteligência artificial.
- Construção de FGM (*Functionally Graded Material*) usando piezelétricos como um dos materiais.
- Modelagem microscópica de piezelétricos.
- Uso de métodos de otimização de elementos piezelétricos com abordagem em controle.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABREU, Gustavo L. C. M. **Projeto robusto  $H_\infty$  aplicado no controle de vibrações em estruturas flexíveis com materiais piezelétricos incorporados**. 2003. 273p. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Minas Gerais.
- AHMAD, S. N.; UPADHYAY, C. S.; VENKATESAN, C. Electro-thermo-elastic formulation for the analysis of smart structures. **Smart Materials and Structures**, United Kingdom v. 15, p. 401-416, 2006.
- ALVES FILHO, Avelino. **Elementos finitos: A base da tecnologia CAE**. 4. Ed. São Paulo: Erica, 2000. 292p.
- BAILLARGEON, B. P.; VEL, S. S. Active vibration suppression of sandwich beams using piezoelectric shear actuators: Experiments and numerical simulations. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 16, p. 517-529, Jun 2005.
- BARRAULT, Guillaume F. G. **Controle ativo de vibrações de baixas e altas frequências e ruído radiado de estruturas complexas**. 2006. 188p. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis.
- BATHE, Klaus-J.; WILSON, Edward L. **Numerical methods in finite element analysis**. 1. ed. United States of America: Prentice-Hall, 1976. 528p.
- BENJEDDOU, A.; DEÜ, J-F.; LETOMBE, S. Free vibrations of simply-supported piezoelectric adaptive plates: An exact sandwich formulation. **Thin-Walled Structures**, v. 40, p. 573-593, 2002.
- BIRMAN, V.; BERT, C. W. On the choice of shear correction factor in sandwich structures. **Journal of Sandwich Structures and Materials**, v. 4, p. 83-95, 2002.
- BOYLESTAD, R. L.; NASHELSKY, L. **Dispositivos eletrônicos e teoria de circuitos**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. 649 p.
- CADY, Walter G. **Piezoelectricity: An introduction to the theory and applications of electro-mechanical phenomena in crystals**. New revised, v. 1. New York: Dover Publications, 1964. 405 p.
- CALLISTER JUNIOR, William D. **Ciência e engenharia de materiais: Uma introdução**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. (p. 21-35)
- CHEE, Clinton Y. K. **Static shape control of laminated composite plate smart structure using piezoelectric actuators**. 2000. Thesis (Doctor of Philosophy) – The University of Sydney, Department of Aeronautical Engineering, Australia.
- CLOUGH, Ray W.; PENZIEN, Joseph. **Dynamics of structures**. 1. International ed. [s.l.]: McGraw-Hill, 1975. 634p.

COLLA, E.L.; MORITA, T. Piezoelectric technology for active vibration control. **Piezoelectric in materials devices**. Setter, N. (Ed.). Ceramics Laboratory, EPFL Lausanne, Switzerland, 2002.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4. ed. United States of America: John Wiley & Sons, 2002. 719p.

DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. **Sistemas de controle modernos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 659p.

FERNANDES, A.; POUGET, J. Accurate modeling of piezoelectric plates: Single-layered plate. **Archive of Applied Mechanics**, v. 71, p. 509-524, 2001.

FULLER, C. R.; ELLIOT, S. J.; NELSON, P. A. **Active control of vibration**. 2.ed. United States: Academic Press, 1997. 332p.

GAUTSCHI, Gustav. **Piezoelectric sensorics: Force, strain, pressure, acceleration and acoustic emission sensors, materials and amplifiers**. 1. ed. Germany: Springer, 2002. 264p.

HAN, J-H.; LEE, I. Analysis of composite plates with piezoelectrics actuators for vibration control using layerwise displacement theory. **Composites Part B: Engineering**, v. 29, n. 5 p. 621-632, 1998.

HATCH, Michael R. **Vibration simulation using MATLAB and ANSYS**. 1. ed. United States of America: Chapman & Hall, 2001. 654p.

HESPANHA, João P. **LQG/LQR controller design**. California, USA: University of California, Department of Electrical and Computer Engineering. 2007. Lecture Notes. Disponível em

HOLLISTER, Scott J. **BME/ME 456 Biomechanics: Large Deformations Mechanics**. Michigan, USA: University of Michigan, [200-]. Lecture Notes. Disponível em <http://www.engin.umich.edu/class/bme456/largedef/largedef.htm>

HWANG, W.-S.; PARK H. C. Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators. **Journal of American Institute of Aeronautics and Astronautics**, v. 31, n. 5, p. 930-937, May. 1993.

IEEE, **Standard on piezoelectricity**. Std. 176-1987. United States of America: The Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1988. 66p.

INMAN, Daniel. J. **Vibration with control**. 1. ed. United Kingdom: John Wiley & Sons, 2006. 376p.

KWON, Young W.; BANG, Hyochoong. **The finite element method using MATLAB**. 1. ed. United States of America: CRC Press, 1997. 519p.

LEE, Y. Y.; YUEN, K. K.; NG, C. F.; CHENG, G. F. Numerical simulation model of vibration responses of rectangular plates embedded with piezoelectric actuators. **Thin-Walled Structures**, v. 40, p. 1-28, 2002.

LIMA JUNIOR, José J. **Modelagem de sensores e atuadores piezelétricos com aplicações em controle ativo de estruturas**. 1999. 209p. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional, São Paulo.

MASON, W. P. Piezoelectricity, its history and applications. **Journal of Acoustical Society of America**, v. 70, n. 6, Dec. 1981.

MARINHO, Marcus V. A. **EMC6501-018 - Elementos Finitos aplicado a problemas não lineares**. Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, 2007. Notas de Aula.

MEIROVITCH, Leonard. **Elements of vibration analysis**. International student ed. Tokyo, Japan: McGraw-Hill Kogakusha, 1975. 495p.

MEIROVITCH, Leonard. **Introduction to dynamics and control**. 1. ed. United States of America: John Wiley & Sons, 1985. 392p.

NG, T. Y.; HE, X. Q.; LIEW, K. M. Finite element modeling of active control of functionally graded shells in frequency domain via piezoelectric sensor and actuators. **Computational Mechanics**, v. 28, p. 1-9, 2002.

NYE, J. F. **Physical properties of crystals**: their representation by tensors and matrices. Great Britain: Oxford University Press, 1957.

PHYSIK INSTRUMENTE. **Design with piezoelectric transducers**: Nanopositioning fundamentals. PI Catalog, 2005.

PIERFORT, Vincent. **Finite element modeling of piezoelectric active structures**. 2001. 126p. Thesis (Doctorate) – Université Libre de Bruxelles, Faculty of Applied Sciences, Department of Mechanical Engineering and Robotics, Bruxelles, Bélgica.

REDDY J. N. On laminated composite plates with integrated sensors and actuators. **Engineering Structures**, v. 21, n.7, Jul. 1999

SANTANA, Danuza C. **Contribuição ao desenvolvimento de técnicas de controle de vibrações empregando piezocerâmicas combinadas com circuitos shunt**. 2005. 146p. Qualificação (Doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Minas Gerais.

SETTER, Nava. ABC of Piezoelectricity and piezoelectric materials. In: **Piezoelectric in materials devices**. Setter, N. (Ed.). Ceramics Laboratory, EPFL Lausanne, Switzerland, 2002.

SORIANO, Humberto L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. 1. ed. São Paulo: Editora USP, 2003. 580p.

SUNAR, M.; HYDER, S. J.; YILBAS, B. S. Robust design of piezoelectric actuators for structural control. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 6257-6270, 2001.

TELES, Tiago F. G. **Método de Galerkin livre de elementos aplicado a placas de materiais compostos laminados**. 2007. 113p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis.

TIERSTEN, H. F. Hamilton's principle for linear piezoelectric media. **Proceedings of the IEEE**, p. 1523-1524, Ago. 1967.

TIPLER, Paul. **Física**: Eletricidade e magnetismo. v. 3, 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1995. 340p.

TROFINO NETO, Alexandre. **DAS 5131 – Controle multivariável**. Experiência 9: Controle LQR. Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, 2007. Notas de Aula. Disponível em <http://www.das.ufsc.br/~trofino/disciplinas/das-5131/modulo-09/modulo%209.pdf>.

TZOU, H. S.; TSENG, C.I. Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems: A piezoelectric finite element approach. **Journal of Sound and Vibration**, v. 138, n. 1, p. 17-34, Jan. 1990.

WILSON, Oscar B. **Introduction to the theory and design of sonar transducers**. 2 ed. United States of America: Peninsula, 1991. 191p.

ZHANG, X. D.; SUN, C. T. Formulation of an adaptive sandwich beam. **Smart Materials and Structures**, United Kingdom, v. 5, n. 6, p. 814-823, Jun 1996.



## APÊNDICE A

### INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Como procedimento mais geral e facilmente aplicado a métodos computacionais, a integração numérica é utilizada em detrimento da integração analítica. Contudo, antes se faz necessária a transformação da integral no espaço de coordenadas retangulares  $xy$  para o espaço paramétrico  $\xi\eta$ , na seguinte forma:

$$\int_{A_e} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \det[J] d\xi d\eta \quad (\text{A.1})$$

Após esta transformação é realizada a integração numérica por meio da quadratura de Gauss.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \det[J] d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{n_{pt}} \sum_{j=1}^{n_{pt}} f(\xi_i, \eta_j) W_i W_j \det[J] \quad (\text{A.2})$$

Os valores do coeficiente de ponderação e a posição do nó são relacionados na tabela a seguir, em função do número de pontos de integração utilizados.

Tabela A1 - Dados para integração numérica.

| <i>Pts. de integração</i><br>$n_{pt}$ | <i>Posição do nó</i><br>$\xi_i$ | <i>Coef. de ponderação</i><br>$W_i$ |
|---------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| 2                                     | $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$        | $\frac{8}{9}$                       |
| 3                                     | $\pm \sqrt{0.6}$                | $\frac{5}{9}$                       |

A integração numérica conforme definida na Eq. (A.2) é utilizada para a integração das matrizes elementares do sistema, para o vetor de força gravitacional  $\vec{F}_e^g$  e o vetor de carga elétrica  $\vec{F}_e^q$ . O vetor de força mecânica  $\vec{F}_e^m$  exige um procedimento algébrico diferenciado, visto que este é definido no contorno do elemento. Considera-se aqui que a força mecânica é aplicada somente nas faces (ou borda) do elemento.

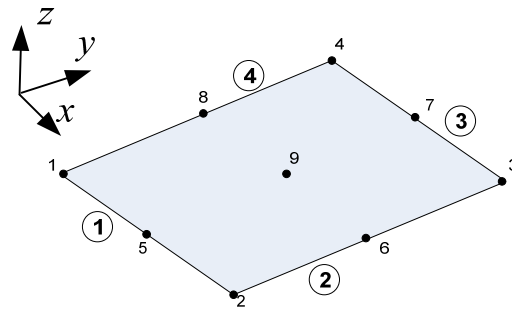


Figura A.1: Numeração de nós e faces do elemento Q9.

O carregamento de contorno deve ser discretizado nas quatro faces do elemento e distribuídos nos respectivos nós que compõem estas faces. A Figura A.1 mostra as quatro faces de um elemento pelos números circulados. A Tabela A2 mostra os nós correspondentes a cada face e a respectiva representação paramétrica.

Tabela A2 - Tabela de numeração das faces de um elemento.

| Face | Nós   | Coord. $(\xi, \eta)$ |
|------|-------|----------------------|
| 1    | 1-5-2 | $(-1, \eta)$         |
| 2    | 2-6-3 | $(\xi, 1)$           |
| 3    | 3-7-4 | $(1, \eta)$          |
| 4    | 4-8-1 | $(\xi, -1)$          |

O detalhamento deste cálculo pode ser encontrado em Cook *et al* (2002). Nesta dissertação somente serão consideradas as cargas aplicadas sobre a área do elemento, forças de corpo e carregamentos pontuais. Assim, as matrizes e vetores integrados numericamente são resumidos a seguir:

$$\begin{aligned}
 [\mathbb{M}] &= \sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} \left\{ [\mathbb{N}_u]^T [\mathbb{I}_m] [\mathbb{N}_u] \right\} W_i W_j \det(J) \\
 [\mathbb{K}_{uu}] &= \sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} \left\{ [\mathbb{B}_u]^T [\mathbb{D}] [\mathbb{B}_u] \right\} W_i W_j \det(J) \\
 [\mathbb{K}_{u\phi}] &= [\mathbb{K}_{\phi u}]^T \\
 [\mathbb{K}_{\phi u}] &= \sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} \left\{ [\mathbb{B}_\phi]^T [\mathbb{E}] [\mathbb{B}_u] \right\} W_i W_j \det(J) \\
 [\mathbb{K}_{\phi\phi}] &= \sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} \left\{ [\mathbb{B}_\phi]^T [\mathbb{J}] [\mathbb{B}_\phi] \right\} W_i W_j \det(J) \\
 \{F_e^g\} &= \sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} \left\{ [\mathbb{N}_u]^T \vec{F}_g \right\} W_i W_j \det(J) \\
 \{F_e^m\} &= \sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} \left\{ [\mathbb{N}_u]^T \vec{\bar{q}} \right\} W_i W_j \det(J) \\
 \{F_e^{\varrho}\} &= \sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} [\mathbb{N}_\phi]^T \begin{Bmatrix} \varrho^{(1)} \\ \varrho^{(3)} \end{Bmatrix} W_i W_j \det(J)
 \end{aligned} \tag{A.3}$$



## APÊNDICE B

### AUTOVALORES E AUTOVETORES

#### O Problema de Autovalor e Análise Modal

O problema de autovalor pode ser definido como um método matemático cujas características podem ser usadas na solução de problemas diferenciais.

O método consiste em eliminar a dependência espacial das equações diferenciais parciais (EDP) reduzindo-as às equações diferenciais ordinárias (EDO). Para tanto é assumido que a solução do deslocamento pode ser decomposta em funções temporais associadas a um conjunto de funções bases no domínio espacial como segue:

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(t) \varphi_i(\vec{x}) \quad (\text{B.1})$$

em que as funções temporais  $\xi(t)$  são chamadas de coordenadas generalizadas e, as funções bases  $\varphi(\vec{x})$  podem assumir qualquer forma, escolhidas arbitrariamente, desde que sejam compatíveis com as condições de contorno essenciais do problema e constituam um conjunto linearmente independente.

Uma importante característica da solução acima é que se pode reduzir o número de bases que formam o problema,

$$U(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \varphi_i(\vec{x}) \quad (\text{B.2})$$

em que  $n$  é o número de bases  $\varphi(\vec{x})$  usadas e  $U(\vec{x}, t)$  é a resposta aproximada de  $u(\vec{x}, t)$ .

Segundo Bathe e Wilson (1976), uma maneira prática e eficiente de se construir as funções bases é obtida através da substituição da solução (B.1) na EDP do sistema livre e sem amortecimento. Como resultado, um problema de autovalor é formado. A solução deste problema é constituída pelas autofunções (ou autovetor no caso discreto), que representam os modos de vibração da estrutura, e formam a base  $\varphi(\vec{x})$  para o conjunto de soluções. O sistema mecânico livre não-amortecido possui a equação diferencial,

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad (\text{B.3})$$

A solução proposta em (B.2) pode ser posta na forma harmônica,

$$U = \Phi [A \sin \omega(t - t_0)]_i \quad (\text{B.4})$$

O método assume que o sistema seja harmônico, note que a parcela temporal assume a forma:

$$\xi_i(t) = [A_i \sin \omega_i(t - t_{0_i})], \text{ sem soma em } i. \quad (\text{B.5})$$

em que  $\omega_i$  é a frequência em regime permanente da onda gerada pelo vetor componente  $\vec{\varphi}_i$  da base  $\Phi = [\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_n]$ ;  $t$  é a variável de tempo; e  $t_{0_i}$  e  $A_i$  são respectivamente as constantes de tempo e as amplitudes a serem determinadas *a posteriori* na solução harmônica pelas condições iniciais.

Levando (B.4) em (B.3) e operando a diferencial no tempo adequadamente tem-se,

$$(K\Phi - M\Phi\omega_i^2)[A_i \sin \omega_i(t - t_{0_i})] = 0 \quad (\text{B.6})$$

A exigência da solução não trivial para  $\xi_i \neq 0$ , remete a formulação do problema de autovalor generalizado, assumindo a forma

$$(K - \lambda_i M)\Phi = 0 \quad (\text{B.7})$$

em que  $\lambda_i = \omega_i^2$ . A solução da equação de autovalor (B.7) fornece *n-pares*  $(\lambda_i, \vec{\varphi}_i)$ . O conjunto de  $\vec{\varphi}_i$  constitui uma matriz de vetores ortogonais linearmente independentes, base para a solução. As soluções do problema de autovalor podem ser postas na forma,

$$\Phi = [\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_n]; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Na vibração mecânica os vetores colunas  $\vec{\varphi}_i$  são chamados de modos de vibração, e  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$  a correspondente frequência de vibração.

### Problema de Autovalor na Forma Padrão

Após esta introdução inicial, torna-se relevante neste ponto, tratar da transformação do problema de autovalor generalizado para sua forma padrão retratada por,

$$(\tilde{K} - \lambda_i I)\tilde{\Phi} = 0 \quad (\text{B.9})$$

Esta transformação é interessante pelo fato de que muitos algoritmos de solução para o problema de autovalor são baseados na forma padrão, e de forma geral a eficiência do processamento é amplamente afetada pela escolha da transformação. Contudo a importância matemática desta transformação é que, sendo possível a sua realização, as propriedades da solução obtida no problema generalizado são deduzidas pelas propriedades da solução do problema padrão (Bathe & Wilson, 1976). Assim sendo, algumas propriedades do problema de autovalores na forma (B.9) que são importantes para o problema da dinâmica em questão são reunidas por (Cook *et.al.*, 2002 apêndice C) e transcritas a seguir. As provas e deduções destas propriedades podem ser obtidas com a ajuda de qualquer literatura de álgebra matricial e problemas de autovalores.

Propriedades:

1. Se  $[\tilde{K}]$  é real e simétrico,  $\lambda_i$  é real.
2. Se  $[\tilde{K}]$  é real, simétrico, e positivo semidefinido, não há  $\lambda_i$  negativo. O número de elementos  $\lambda_i$  diferente de zero é igual ao posto de  $[\tilde{K}]$ .
3. Se  $[\tilde{K}]$  é real, simétrico, e positivo definido,  $\lambda_i$  é positivo.
4. Se  $[\tilde{K}]$  é real e positivo definido, mas assimétrico, a matriz  $[\tilde{K}] + [\tilde{K}]^T$  possui autovalores positivos.
5. A soma de  $\lambda_i$  é igual ao traço de  $[\tilde{K}]$ , e o produto de  $\lambda_i$  é igual ao determinante de  $[\tilde{K}]$ .
6. Se  $\{\tilde{\varphi}\}_i$  é um autovetor, então  $c\{\tilde{\varphi}\}_i$  também é um autovetor, em que  $c$  é um escalar arbitrário diferente de zero.
7. Se todos os  $\lambda_i$  são distintos, todos os autovetores são distintos e linearmente independentes.
8. Se um  $\lambda_i$  é repetido  $k$  vezes, os autovetores associados não são únicos, contudo, um conjunto de  $k$  autovetores mutuamente ortogonais pode ser construído.

9. Seja  $[S]$  uma matriz quadrada, não singular, e da mesma ordem de  $[\tilde{K}]$ , mas de outra forma arbitrária, uma matriz  $[A]$  obtida pela transformação de similaridade  $[A] = [S]^{-1}[\tilde{K}][S]$ , possui os mesmos autovalores de  $[\tilde{K}]$ . Se  $\{\varphi_A\}_i$  é autovetor de  $[A]$ , o correspondente autovetor de  $[\tilde{K}]$  é  $[S]\{\varphi_A\}_i$ .
10. Se  $[\tilde{K}]$  é real e simétrico, seus autovetores são ortogonais, isto é,  $\{\tilde{\varphi}\}_i^T \{\tilde{\varphi}\}_j = 0$ , para  $i \neq j$ .
11. Se um fator de escala é usado tal que  $\{\tilde{\varphi}\}_i^T \{\tilde{\varphi}\}_i = 1$ , então  $\{\tilde{\varphi}\}_i^T [\tilde{K}] \{\tilde{\varphi}\}_i = \lambda_i$ .
12. Se um fator de escala é usado para cada autovetor tal que  $\{\tilde{\varphi}\}_i^T \{\tilde{\varphi}\}_i = 1$  e  $[\tilde{K}]$  é simétrico positivo definido de ordem  $n$ , então  $[\tilde{K}] = \sum_{i=1}^n \lambda_i \{\tilde{\varphi}\}_i \{\tilde{\varphi}\}_i^T$  e  $[\tilde{K}]^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \{\tilde{\varphi}\}_i \{\tilde{\varphi}\}_i^T$ .

A redução do problema de autovalor generalizado para sua forma padrão pode ser obtida por vários métodos diferentes. Assim, pode-se optar por multiplicar a Eq. (B.7) por  $M^{-1}$ , obtendo:

$$(M^{-1}K - \lambda I)\varphi = 0 \quad (\text{B.10})$$

À primeira vista a obtenção de  $\tilde{K} = M^{-1}K$  pode parecer simples, entretanto esta operação usualmente pode gerar  $\tilde{K}$  assimétrico, o que resulta em autovalores fora da diagonal principal da matriz de autovalores  $\Lambda$ , e o um processo de obtenção destes autovalores é invariavelmente mais complexo. Contudo, sem perda de generalidade, os autovalores da diagonal deste sistema podem ser obtidos da parte simétrica  $(\tilde{K} + \tilde{K}^T)/2$  usando as propriedades (4), (6).

Um segundo método, mais interessante, consiste no fato de que a matriz de massa  $M$  é positiva definida. Neste caso é possível fazer a decomposição de Cholesky<sup>6</sup>:

$$M = S^T S \quad (\text{B.11})$$

---

<sup>6</sup> A decomposição pode ser feita por variações do método de Cholesky para casos mais gerais.



em que  $S$  é uma matriz triangular superior e não singular. A transformação do problema de autovalor é feita na forma descrita por Bathe e Wilson (1976) em que, usando as propriedades (6) e (9), define-se o novo autovetor por:

$$\tilde{\Phi} = S\Phi \quad \text{e} \quad \Phi = S^{-1}\tilde{\Phi} \quad (\text{B.12})$$

Substituindo a Eq. (B.12) no problema generalizado e pré-multiplicando  $S^{-T}$  obtém-se a matriz de rigidez transformada na forma,

$$\tilde{K} = S^{-1}KS^{-T} \quad (\text{B.13})$$

A matriz de rigidez transformada na Eq. (B.10) difere da obtida na Eq. (B.13), pois nesta última forma é garantida a simetria da matriz.

### Ortogonalidade do Autovetor

No que se refere à ortogonalidade do autovetor definida pela propriedade (10), tem-se que:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_i^T \tilde{\Phi}_j &= 0 \\ \tilde{\Phi}_i^T \tilde{K} \tilde{\Phi}_j &= 0 \end{aligned} \quad \text{para } i \neq j \quad (\text{B.14})$$

Nota-se que nada pode ser dito sobre os valores das relações em (B.14) quando  $i = j$ . Contudo é relevante notar que existe um subespaço de autovetores tal que a normalização seja possível através da propriedade (11). Nestes casos o autovetor é dito ser ortogonal e a relação (B.14) pode ser expressa na forma,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_n^T \tilde{\Phi}_n &= \delta_{ij} \\ \tilde{\Phi}_n^T \tilde{K} \tilde{\Phi}_n &= \lambda_i \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

em que  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e o conjunto de autovetores  $\tilde{\Phi}_n \neq \tilde{\Phi}$  é o autovetor normalizado.

Com relação ao problema de autovalor generalizado, é fácil provar a existência das relações (B.15), na forma:

$$\begin{aligned} \Phi_m^T M \Phi_m &= \delta_{ij} \\ \Phi_m^T K \Phi_m &= \lambda_i \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Nestas relações a matriz de autovetor  $\boldsymbol{\varphi}_m$  é dita ser M-ortonormal (ou normalizada pelas massas) e é K-ortogonal em relação à matriz de rigidez  $K$ .

Nota-se que nas transformações (B.14), (B.15) e (B.16), qualquer conjunto de autovetor  $\tilde{\varphi}_i \neq_n \tilde{\varphi}_i \neq_m \varphi_i$  satisfaz a equação de autovalor para mesmo autovalor  $\lambda_i$ . Vislumbra-se então a existência de um subespaço que possui um conjunto de  $k$  matrizes de autovetores  $\boldsymbol{\varphi}_k$  correspondente a  $\Lambda$ .

### Equação da Dinâmica em Coordenadas Modais

Determinado os autovalores e autovetores a equação diferencial dinâmica na Eq. (B.3) pode ser escrita em termos modais:

$$M\boldsymbol{\varphi}\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t) + K\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\xi}(t) = F(t) \quad (\text{B.17})$$

Pré-multiplicando a equação por  $\boldsymbol{\varphi}^T$ :

$$\boldsymbol{\varphi}^T M \boldsymbol{\varphi} \ddot{\boldsymbol{\xi}}(t) + \boldsymbol{\varphi}^T K \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\varphi}^T \vec{F}(t) \quad (\text{B.18})$$

e usando as propriedades descritas em (B.16), em que os autovetores são M-ortonormais, a equação dinâmica finalmente pode ser escrita na forma:

$$\ddot{\xi}_i(t) + \text{diag}(\lambda_i) \xi_i(t) = \varphi_i^T F_i(t) \quad (\text{B.19})$$

A transformação no espaço de coordenadas pelo uso dos modos de vibração possibilitou a obtenção da equação (B.19), esta transformação torna-se interessante, visto que a nova equação constitui um conjunto de equações diferenciais desacopladas, isto é,

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1(t) + \lambda_1 \xi_1(t) &= \varphi_1 F(t) \\ \ddot{\xi}_2(t) + \lambda_2 \xi_2(t) &= \varphi_2 F(t) \\ &\vdots \\ \ddot{\xi}_n(t) + \lambda_n \xi_n(t) &= \varphi_n F(t) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

em que as coordenadas generalizadas  $\xi$  passam a constituir o conjunto de variáveis, graus de liberdade, a ser determinado. A solução da Eq. (B.19) é facilitada, já que se torna possí-

vel a resolução das equações em (B.20) de forma independente. O número de variáveis  $n$  neste novo problema depende do número de autopares  $(\lambda_i, \varphi_i)$  determinados pelo problema de autovalor (B.7). No que concerne ao problema de elementos finitos, o número de autopares possíveis de serem determinados é igual ao número de nós no sistema, entretanto quanto maior a frequência natural determinada por  $\lambda_i$  menor é a precisão do autopar encontrado no problema de autovalor. De fato, Cook *et al.* (2002) menciona que não mais do que metade do autopares possui precisão suficiente para ser usado na solução harmônica.

Contudo a limitação anterior pouco interfere na solução do problema. De modo prático, a grande vantagem do método é que apenas alguns modos de vibração são necessários para resolver o problema. Em geral usam-se os primeiros modos até alguns poucos após a frequência de excitação da força  $F(t)$ . A escolha exata de quantos modos deve ser usada na análise não é trivial; esta tarefa de limitar o número de modos cabe ao analista, em detrimento à fidelidade da resposta desejada.

Como conclusão do método vê-se que há uma drástica redução no número de graus de liberdade usados para representar o modelo, além de desacoplar as equações diferenciais a serem resolvidas. A contrapartida resulta em determinar alguns modos e frequências de vibração pelo problema de autovalores, o que demanda grande custo computacional. Contudo este custo é viabilizado, visto que, em geral é desejável conhecer estas características do sistema.